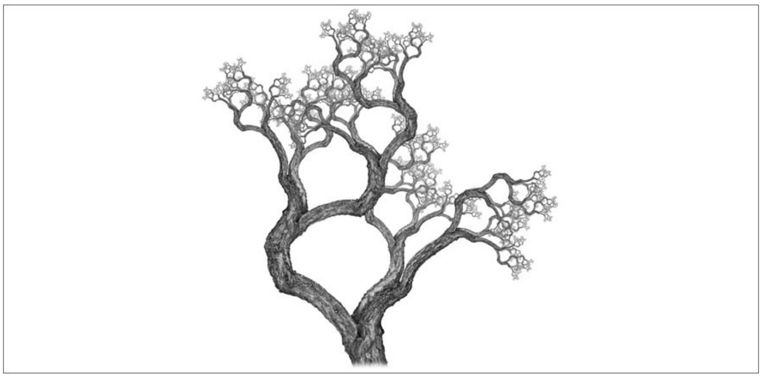
Introducción a los Sistemas Dinámicos Estocásticos



Carlos Manada (Imagen de robert Fathauer)

Este trabajo hubiera sido imposible sin la generosidad de los profesores D. Carlos Escudero Liébana, y D. Daniel Franco Leis. A Daniel le agradezco su ánimo y paciencia al corregirme a.s. y a Carlos que siendo tan grande sea capaz de acercarse y ayudar tanto a lo que es mucho más pequeño que él.

Carlos Manada.
Madrid, 25 de julio de 2021.

$\Pi\alpha\nu\tau\alpha\ \rho\epsilon\iota$

$H\rho\alpha\kappa\lambda\epsilon\iota\tau o\zeta$

Notación.

A. Abreviaturas.

(ODE)	Ecuación diferencial ordinaria.
(RDE)	Ecuación diferencial aleatoria.
(SDE)	Ecuación diferencial estocástica.
(SODE)	Ecuación diferencial ordinaria estocástica.
(RDS)	Sistema dinámico aleatorio.
(SPF)	Flujo producto asimétrico.
(ADS)	Sistema dinámico autónomo.
(NADS)	Sistema dinámico no autónomo.

B. Notación Conjuntista.

$:=$	Definición.
$(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$	Espacio métrico.
x	Elemento de $\mathbb{X}$.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclídeo n-dimensional real.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de los números enteros mayores o iguales que cero.
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de los números reales mayores o iguales que cero.
$\mathbb{R}^2_+$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$.
$\mathbb{R}^3_+$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$.
$\operatorname{dist}(A, B)$	Semidistancia de Hausdorff entre A y B, $\sup_{x\in A} \inf_{y \in B} \mathrm{d}(x,y)$.
$A \subset B$	A es un subconjunto de B.
$K \subset\subset A$	K es un subconjunto compacto de A.

C. Notación probabilística.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espacio de probabilidad.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
a.s.	Casi seguramente en $\mathbb{P}$.
ω	Elemento de Ω.
$W_t(\omega) = W(t,\omega) = \omega(t)$	Proceso de Wiener.
$\mathbb{E}$	Esperanza.

D. Notación Funcional.

$C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$	Espacio de funciones continuas.
$C^1(\mathbb{X}, \mathbb{R})$	Espacio de funciones con derivada continua.
$C_b(\mathbb{X}, \mathbb{R})$	Espacio de funciones continuas acotadas.
$\|f\|_{L^p}$	Norma L^p de f.
$D_x,\ \frac{d}{dx}$	Denotará indistintamente a la derivada.

Introducción

Consideremos la EDO autónoma $\dot{x} = f(x)$ con $x(t_0) = x_0$ en $\mathbb{R}^n$. Asumiendo existencia global y unicidad, la solución que generará una aplicación $(t, t_0, x_0) \mapsto x(t, t_0, x_0)$ invariante por traslaciones en el tiempo, más concretamente, $x(t-t_0, 0, x_0) = x(t, t_0, x_0)$. Para darse cuenta de este hecho solo hay que comprobar que tanto la parte izquierda de la igualdad, como la derecha, verifican la misma EDO y el mismo dato inicial, y entonces, por la unicidad de soluciones, ambas expresiones son la misma. Esto hace que en el caso de una EDO autónoma nos podamos restringir a $t_0 = 0$ y a escribir la solución como $x(t, x_0)$. Si llamamos $\varphi(t, x_0) := x(t, x_0)$, vemos que φ verifica

1. Una condición inicial: $\varphi(0, x_0) = x_0$.

2. Una propiedad de grupo: $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$.

Esto motiva la siguiente definición

Definición. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. Un sistema dinámico autónomo es una aplicación continua $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, verificando las propiedades 1 y 2 anteriores.*

El conjunto $\mathbb{T}$ es $\mathbb{Z}$ (para el caso discreto), o $\mathbb{R}$ (para el caso continuo).
Consideremos ahora la EDO no autónoma $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ en $\mathbb{R}^n$. En este caso, las soluciones no son invariantes por traslaciones, como muestra por ejemplo la EDO no autónoma $\dot{x} = -2tx$ con $x(t_0) = x_0$, que tiene por solución a $x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{-(t^2 - t_0^2)}$, que claramente no es invariante por traslaciones en el tiempo.
En el caso no autónomo, las soluciones verifican,

1. $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

2. $x(t_2, t_0, x_0) = x(t_2, t_1, x(t_1, t_0, x_0))$ con $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

Análogamente a como definíamos un sistema dinámico continuo autónomo, podemos definir un proceso, en el caso no autónomo como:

Definición. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. Un proceso es una aplicación continua $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, verificando las propiedades 1 y 2 anteriores.*

Una propiedad interesante de los procesos es que pueden ser formulados como sistemas semidinámicos ($t \geq t_0$) autónomos, para ello defino $\mathcal{X} = \mathbb{T} \times \mathbb{X}$ y defino una aplicación $\pi : \mathbb{T}^+ \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ dada por

$$\pi(t, (t_0, x_0)) := (t + t_0, \varphi(t + t_0, t_0, x_0)),$$

entonces π es un sistema semidinámico autónomo sobre $\mathcal{X}$. Efectivamente,

1. $\pi(0, (t_0, x_0)) = (t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0)) = (t_0, x_0)$.
2. $\pi(s+t, (t_0, x_0)) = (s+t+t_0, \varphi(s+t+t_0, t_0, x_0))$, mientras que $\pi(s, \pi(t, (t_0, x_0))) = \pi(s, (t + t_0, \varphi(t + t_0, t_0, x_0))) = (s + t + t_0, \varphi(s + t + t_0, t_0, x_0))$.

Sin embargo, la formulación de procesos tiene el inconveniente de que al extender algunos conceptos fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos en el caso autónomo (y veremos que también en el caso estocástico), como es el concepto de conjunto ω-límite, estos, no existen fuera del vacío. Esto es consecuencia de la propia definición de conjunto ω-límite (ver la Definición 1.2.2 y la Definición 1.2.3) y de que el tiempo es un parámetro del estado. Sea $M \subset \mathcal{X}$, entonces, por la definición de conjunto ω-límite

$$\omega(M) := \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \pi(t, M)}, \;\; \pi(t, M) := \bigcup_{(t_0, x_0) \in M} \{(t + t_0, \varphi(t + t_0, t_0, x_0))\},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \omega(M) &= \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \pi(t, M)} \\ &= \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{\substack{t \geq \tau \\ (t_0, x_0) \in M}} \{(t + t_0, \varphi(t + t_0, t_0, x_0))\}} = \emptyset. \end{aligned}$$

Esto significará, entre otras cosas, que la definición de sistema dinámico no autónomo tendrá que ser modificada adecuadamente, ya que la motivación de este trabajo, es el análisis asintótico de sistemas dinámicos (no autónomos) estocásticos. Veamos el siguiente ejemplo que nos servirá como motivación.
Consideremos un sistema de EDOs

$$\dot{p} = f(p), \;\; \dot{x} = g(p, x), \;\; p \in \mathbb{R}^n \text{ y } x \in \mathbb{R}^m.$$

Asumiendo regularidad suficiente en los datos podemos suponer existencia y unicidad de soluciones en el sistema que generan un sistema semidinámico autónomo π en $\mathbb{R}^{n+m}$, el cual puede ser escrito como

$$\pi(t, p_0, x_0) = (p(t, p_0), x(t, p_0, x_0)).$$

Algunas observaciones:

1. La propiedad de semigrupo para p: $p(s+t,p_0) = p(s,p(t,p_0)),\ s,t \geq 0$.

2. Una generalización de la propiedad de semigrupo, conocida como propiedad de cociclos para x: $x(s+t,p_0,x_0) = x(s,p(t,x_0),x(t,p_0,x_0)),\ s,t \geq 0$.

Al término p se le llama término director (*driven* en inglés) ya que $\dot{x} = g(p,x)$, es el responsable en el cambio de los campos de vectores con el tiempo.

Definición. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *y* (P, d_P) *dos espacios métricos. Un sistema dinámico no autónomo es un par* (θ, φ) *formado por una aplicación de cociclos* φ *(es decir, la aplicación* $\varphi : \mathbb{T}^+ \times P \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *es continua, satisface la propiedad de cociclos, y* $\varphi(0,p,x) = x$*) actuando sobre el espacio de fases* $\mathbb{X}$*, el cual es dirigido por el sistema dinámico autónomo* θ *actuando sobre el espacio de parámetros* P *y el tiempo* $\mathbb{T}$ *(*$\mathbb{Z}$ *o* $\mathbb{R}$*). Más precisamente,* $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *es un grupo de homeomorfismos actuando sobre* P *bajo composición satisfaciendo* $\theta_0(p) = p,\ \theta_{s+t}(p) = \theta_s(\theta_t(p)),\ (t,p) \mapsto \theta_t(p)$ *es continua.*

La aplicación $\pi : \mathbb{T}^+ \times P \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ definida por

$$\pi(t,(p,x)) = (\theta_t(p), \varphi(t,p,x)),$$

forma un sistema semidinámico autónomo sobre $P \times \mathbb{X}$. A este sistema semidinámico autónomo se le conoce como flujo producto asimétrico ((SKF) *Skew product flow* en inglés) del sistema dinámico no autónomo (θ, φ).
Obsérvese que hemos eliminado el tiempo como parámetro del espacio de fases a costa de introducir el grupo de homeorfismos θ_t.
La formulación SKF de un sistema dinámico no autónomo a partir de una ecuación diferencial no autónoma es como sigue. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación no autónoma $\dot{x} = f(t,x),\ x(0) = x_0$, entonces para un $\tau \in \mathbb{R}$ fijo, $x_\tau(t) := x(t+\tau)$ es solución de la ecuación $\dot{x}_\tau(t) = f_\tau(t, x_\tau(t)) := f(t+\tau, x(t+\tau))$. Consideremos la clausura $\mathcal{F}$ de $\{f_\tau(\cdot,\cdot)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$. Sea ahora $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definida por $\theta_\tau(f) = f_\tau$. Sean también $\mathcal{X} = \mathcal{F} \times \mathbb{R}^n$, y $\varphi(t,f,x_0)$ la solución $x(t,f,x_0)$. Entonces $\pi : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definida por $\pi(t,x_0,f) = (\theta_t(f), \varphi(t,x_0,f))$ es la formulación buscada.

Estamos listos ahora para introducir el concepto de sistema dinámico aleatorio.

Definición. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$*. Un sistema dinámico aleatorio* (θ, φ) *sobre* $\mathbb{X}$ *consiste en un sistema dinámico director*

$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *actuando sobre el espacio de probabilidad (y entonces* $\theta_0(\omega) = \omega$, $\theta_{s+t}(\omega) = \theta_s(\theta_t(\omega))$, $(t,\omega) \mapsto \theta_t(\omega)$ *es medible, y* $\theta_t(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$, *es decir* $\mathbb{P}(\theta_t^{-1}(F)) = \mathbb{P}(F)\ \forall F \in \mathcal{F}$*) y una aplicación cociclo* φ *actuando sobre* $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{X}$ *(es decir, la aplicación* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *es continua, satisface la propiedad de cociclos,* $\varphi(0,\omega,x) = x$ *y* $(t,\omega,x) \mapsto \varphi(t,\omega,x)$ *es medible).*

Comentemos algunos aspectos concretos de la definición anterior. En los RDS, trabajaremos con un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, con $\mathcal{F}$ una σ-álgebra, formada por subconjuntos medibles de Ω, llamado espacio muestral y una probabilidad $\mathbb{P}$. Para rastrear el efecto del ruido en el tiempo, debemos seguir cada "muestra", es decir, cada $\omega \in \Omega$, en el tiempo. Este rastreo lo denotaremos por $\theta_t(\omega)$. Por tanto, en lugar de tener una ecuación diferencial ordinaria aleatoria (RODE),

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\omega,x), \tag{1}$$

tendremos una ecuación del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(\theta_t(\omega),x). \tag{2}$$

En el trabajo, consideraremos dos tipos de ruido, uno que podremos modelizar a través de $\theta_t(\omega)$ (ecuaciones diferenciales aleatorias, RDE), y otro a través de un proceso de Wiener (ecuaciones diferenciales estocásticas, SDE). Uno de los objetivos del trabajo será, cuando se pueda, transformar una SDE en una RDE, y aplicar las técnicas de los RDS.

La generación del sistema dinámico aleatorio a partir de la ecuación diferencial aleatoria es como sigue. Consideremos la RDE

$$\frac{dx}{dt} = f(\theta_t(\omega),x), \tag{3}$$

con $\{\theta_t\}_t$ un sistema dinámico director actuando sobre $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
Denotemos por $x(t,t_0,\omega,x_0)$ a su solución (suponemos hipótesis suficientes de regularidad sobre f para garantizar la solución única de la ecuación), con $t \geq t_0$ y $x(t_0) = x_0$. Definamos ahora

$$\varphi(t,\omega,x_0) := x(t,0,\omega,x_0),$$

entonces (θ,φ) es un RDS. Efectivamente, veamos que se verifica la propiedad de cociclo,

$$\varphi(t-t_0,\theta_{t_0}(\omega),x_0) = x(t-t_0,0,\theta_{t_0}(\omega),x_0) = x(t,t_0,\omega,x_0),$$

es decir,

$$\varphi(t, \theta_{t_0}(\omega), x_0) = x(t + t_0, t_0, \omega, x_0).$$

Índice general

Capítulo 1

El caso autónomo

Los sistemas dinámicos autónomos son una teoría bien establecida, investigada intensamente en los dos últimos siglos. En este capítulo intentaremos establecer los conceptos fundamentales a desarrollar en los sistemas no autónomos, especialmente en los sitemas aleatorios.

1.1. Formulación

Definición 1.1.1. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico y $\mathbb{T}$ o bien $\mathbb{R}$ o bien $\mathbb{Z}$. Un sistema dinámico autónomo (ADS) es una aplicación continua $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, verificando*

1. *Una condición inicial:* $\varphi(0, x_0) = x_0, \ \forall x_0 \in \mathbb{X}$.

2. *Una propiedad de grupo:* $\varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0)), \forall s, t \in \mathbb{T}, \ x_0 \in \mathbb{X}$.

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ el sistema dinámico se dice continuo, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ se dice discreto.

Definición 1.1.2. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico y $\mathbb{T}$ o bien $\mathbb{R}$ o bien $\mathbb{Z}$. Un sistema semidinámico autónomo es una aplicación continua $\varphi : \mathbb{T}^+ \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, verificando*

1. *Una condición inicial:* $\varphi(0, x_0) = x_0, \ \forall x_0 \in \mathbb{X}$.

2. *Una propiedad de semigrupo:* $\varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0)), \forall s, t \in \mathbb{T}^+, \ x_0 \in \mathbb{X}$.

1.2. Teoría de la estabilidad clásica

El comportamiento (asintótico) de un sistema semidinámico está caracterizado por sus conjuntos invariantes.

Definición 1.2.1. *Sea* $\varphi : \mathbb{T}^+ \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *un sistema semidinámico sobre un espacio métrico* $\mathbb{X}$. *Un subconjunto* M *de* $\mathbb{X}$ *se dice* φ*-invariante si*

$$\varphi(t, M) = M, \ \forall t \in \mathbb{T}^+, \ \textit{con } \varphi(t, M) = \{\varphi(t, m) : m \in M\}.$$

Por otra parte, se dice positivamente invariante si $\varphi(t, M) \subset M, \ \forall t \in \mathbb{T}^+$, *y negativamente invariante si* $M \subset \varphi(t, M), \ \forall t \in \mathbb{T}^+$.

Un tipo importante de conjuntos invariantes son los conjuntos ω-límite.

Definición 1.2.2. *Sea* $\varphi : \mathbb{T}^+ \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *un sistema semidinámico sobre un espacio métrico* $\mathbb{X}$. *El conjunto* ω*-límite de un punto* $\xi \in \mathbb{X}$ *es*

$$\omega(\xi) := \{x \in \mathbb{X} : \exists \{t_j\}_j \subset \mathbb{T}^+, \ \textit{tal que } t_j \to \infty, \ \varphi(t_j, \xi) \to x\}.$$

Otra forma de escribir el conjunto ω-límite de ξ es como,

$$\omega(\xi) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \{\varphi(t, \xi)\}}.$$

Aprovechando esta forma de escribir el conjunto ω-límite de ξ, definimos el conjunto ω-límite de un subconjunto M de $\mathbb{X}$, como

Definición 1.2.3. *Sea* $\varphi : \mathbb{T}^+ \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *un sistema semidinámico sobre un espacio métrico* $\mathbb{X}$, *y sea* $M \subset \mathbb{X}$, *definimos el conjunto* ω*-límite de* M *como*

$$\omega(M) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \varphi(t, M)}.$$

1.2.1. Estabilidad de Lyapunov

Veremos que lo que ocurre en la vecindad de un conjunto invariante nos puede dar pistas de lo que puede ocurrir asintóticamente.

Definición 1.2.4. *Un subconjunto invariante* M *de un espacio métrico es estable en el sentido de Lyapunov para un sistema semidinámico* φ, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta(\epsilon) > 0$ *tal que*

$$\operatorname{dist}(\varphi(t, \xi), M) < \epsilon, \ \forall t \in \mathbb{T}^+ \ \textit{cuando} \ \operatorname{dist}(\xi, M) < \delta.$$

Definición 1.2.5. *Un subconjunto invariante* M *de un espacio métrico es atractivo en el sentido de Lyapunov para un sistema semidinámico* φ, *si existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, x), M) = 0, \ \forall x \in \mathbb{X} \ \textit{si} \ \operatorname{dist}(x, M) < \delta.$$

1.2.2. Funciones de Lyapunov

Teorema 1.2.1. *Supongamos que M es un conjunto compacto invariante no vacío para un sistema semidinámico φ sobre un espacio métrico completo $\mathbb{X}$. Supongamos también que existe una función continua $V : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}^+$, verificando*

1. *Existen funciones continuas estrictamente crecientes $\alpha, \beta : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ con $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ tal que*

$$\alpha(\mathrm{dist}(x, M)) \leq V(x) \leq \beta(\mathrm{dist}(x, M)), \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

2. $V(\varphi(x, t)) \leq V(x), \ \forall x \notin M, t > 0.$

Entonces M es estable en el sentido de Lyapunov.

Demostración. Tenemos que

$$\alpha(\mathrm{dist}(\varphi(t, x), M))) \leq V(\varphi(t, x)) \leq V(x) \leq \beta(\mathrm{dist}(x, M)),$$

y por tanto,

$$\mathrm{dist}(\varphi(t, x), M)) \leq \alpha^{-1}(\beta(\mathrm{dist}(x, M))).$$

□

Entendemos a las funciones de Lyapunov en un sentido amplio (por ejemplo, la función V del teorema anterior), como aquellas funciones que nos permiten probar la estabilidad de un sistema. Son una medida no lineal de la distancia al conjunto invariante, que gráficamente tienen la forma de una cuenca de energía, en la que el atractor local, está en la base de la cuenca, y la energía no crece a lo largo de las trayectorias fuera del atractor local.

1.3. Atractores

Un atractor local de un sistema semidinámico es un conjunto compacto que atrae todas las trayectorias que comienzan cerca del atractor. Más precisamente.

Definición 1.3.1. *Sea φ un sistema semidinámico sobre un espacio métrico $\mathbb{X}$. Un conjunto $\mathcal{A}$ compacto invariante se dice un atractor local de φ si existe un $\eta > 0$ tal que*

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}(\varphi(t, B_\eta(\mathcal{A})), \mathcal{A}) = 0,$$

con $B_\eta(\mathcal{A}) := \{x \in \mathbb{X} : \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}) < \eta\}$.

Cuando el espacio métrico es compacto, el atractor local se puede definir como el conjunto ω-límite de un entorno del atractor.

Proposición 1.3.1. *Sea φ un sistema semidinámico sobre un espacio métrico compacto. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{A}$ es un atractor local.*

2. *Existe un $\eta > 0$ tal que $\omega(B_\eta(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es un atractor local, entonces existe un $\eta > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, B_\eta(\mathcal{A})), \mathcal{A}) = 0.$$

Supongamos que $\omega(B_\eta(\mathcal{A})) \neq \mathcal{A}$, lo cual implica que $\omega(B_\eta(\mathcal{A})) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$, y por tanto existen $\{t_n\}_n \subset \mathbb{T}^+$ convergiendo a infinito, y $\{x_n\}_n \subset B_\eta(\mathcal{A})$ tal que $\lim_n \varphi(t_n, x_n) = x \notin \mathcal{A}$, contradiciendo que $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, B_\eta(\mathcal{A})), \mathcal{A}) = 0$.
Por otra parte, supongamos que existen $\epsilon > 0$, $\{t_n\}_n \subset \mathbb{T}^+$ convergiendo a infinito, y $\{x_n\}_n \subset B_\eta(\mathcal{A})$ tal que

$$\operatorname{dist}(\varphi(t_n, x_n), \mathcal{A}) > \epsilon, \ \forall n.$$

Ahora, por compacidad de $\mathbb{X}$, existe una subsucesión convergente de $\{\varphi(t_n, x_n)\}_n$, y el límite pertenece a $\omega(B_\eta(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción. □

Vayamos ahora a la cuestión de la existencia de atractores locales.
En lo que sigue, consideraremos que el espacio métrico es completo.

Definición 1.3.2. *Sea φ un sistema semidinámico sobre un espacio métrico $\mathbb{X}$. Un subconjunto compacto C no vacío de $\mathbb{X}$ se dice localmente absorbente para φ si existe un $\eta > 0$ y un $T \in \mathbb{T}^+$ tal que $\varphi(t, B_\eta(C)) \subset C, \ \forall t > T$.*

Definición 1.3.3. *Un conjunto (localmente) absorbente que es positívamente invariante se dice (localmente) atractivo.*

Teorema 1.3.1. *Supongamos que un sistema semidinámico φ tiene un conjunto localmente atractivo B. Entonces φ tiene un atractor local $\mathcal{A} \subset B$ dado por*

$$\mathcal{A} = \omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \varphi(t, B).$$

Demostración. Tenemos que $\varphi(s,B) \subset \varphi(t,B)$, $\forall s \geq t$ (esto es así porque $\varphi(s,B) = \varphi(t+(s-t),B) = \varphi(t,\varphi(s-t,B)) \subset \varphi(t,B)$), por tanto $\varphi(t,B) = \overline{\bigcup_{t\leq s}\varphi(s,B)}$. Además todo $\varphi(t,B)$ es compacto para todo $t \geq 0$ (por compacidad de B y continuidad de $x \mapsto \varphi(t,x)$). Ahora, puesto que la intersección de compactos anidados no vacíos (en un espacio métrico completo) es un compacto no vacío, tenemos que $\mathcal{A} := \bigcap_{t\geq 0}\varphi(t,B)$ es un compacto no vacío.
Probemos que es invariante. Nótese que $a \in \mathcal{A}$ si y solo si existen $\{t_n\}_n$ convergiendo a infinito, y $\{b_n\}_n \subset B$ tal que $\varphi(t_n,b_n) \to a$. Por otra parte $\varphi(T+t_n,b_n) = \varphi(T,\varphi(t_n,b_n)) \to \varphi(T,a) \in \mathcal{A}$, y como $T>0$ es arbitrario, $\varphi(T,\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, $\forall T>0$. Análogamente se prueba que $\mathcal{A} \subset \varphi(T,\mathcal{A})$, $\forall T>0$.
Solo queda probar que $\mathcal{A}$ atrae un entorno de sí mismo. Como $\mathcal{A} \subset B$, solo hay que probarlo para algún $B_\eta(B)$, pero como B es localmente absorbente, solo hay que probarlo para B. Supongamos que esto es falso, entonces existen $\epsilon > 0$, $\{b_n\}_n \subset B$ y $t_n \to \infty$ tal que

$$\mathrm{dist}(\varphi(t_n,b_n),\mathcal{A}) > \epsilon,\ \forall n.$$

Pero esto es falso por compacidad de B, ya que entonces existe una subsucesión de $\{\varphi(t_n,b_n)\}_n$ convergente en $\mathcal{A}$. □

A diferencia de los atractores locales, los atractores globales no solo atraen trayectorias en un entorno, sino que atraen el espacio entero. Más precisamente.

Definición 1.3.4. *Un subconjunto compacto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{X}$ es un atractor global de un sistema semidinámico φ si es φ-invariante y atrae cualquier conjunto acotado,*

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}(\varphi(t,D),\mathcal{A}) = 0, \textit{para cualquier acotado } D \subset \mathbb{X}.$$

Usualmente hablaremos solo de atractor, ya que si existe un atractor global, éste es único.

Teorema 1.3.2. *Existe a lo más, un atractor global.*

Demostración. Supongamos que existen dos, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$. Ya que son compactos, y por tanto acotados,

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}(\varphi(t,\mathcal{A}_1),\mathcal{A}_2) = 0,\ \text{y}\ \lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}(\varphi(t,\mathcal{A}_2),\mathcal{A}_1) = 0.$$

Ahora, ya que son invariantes,

$$\mathrm{dist}(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2) = 0,\ \text{y}\ \mathrm{dist}(\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1) = 0.$$

Lo cual implica que $A_1 = A_2$. □

Definición 1.3.5. *Un conjunto compacto no vacío B se dice un conjunto absorbente de un sistema semidinámico φ, si para todo conjunto acotado $D \subset \mathbb{X}$, existe un $T(D) > 0$, tal que*

$$\varphi(t, D) \subset B, \ \forall t > T.$$

Teorema 1.3.3. *Supongamos que un sistema semidinámico φ tiene un conjunto atractivo B. Entonces φ tiene un atractor $\mathcal{A} \subset B$ dado por*

$$\mathcal{A} = \omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \varphi(t, B).$$

Demostración. Ver la demostración del Teorema 1.3.1. $\square$

1.4. Referencias

En la elaboración del capítulo he seguido [22].

Capítulo 2

El caso no autónomo

La formulación de un sistema autónomo como un grupo o semigrupo depende del hecho de que la evolución del sistema depende de $t - t_0$, sin embargo, para un sistema no autónomo, la evolución depende de t, y de t_0, y no de $t - t_0$.
Aun así, conservaremos la formulación de un sistema autónomo en la formulación de un sistema no autónomo, como un mecanismo director que permitirá el cambio temporal del sistema no autónomo.

2.1. Formulación

Definición 2.1.1. *Sea (P, d_P) un espacio métrico de parámetros, y sea $\theta = \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un grupo de homeomorfismos actuando bajo composición sobre P, satisfaciendo*

1. $\theta_0(p) = p,\ \forall p \in P$.
2. $\theta_{t+\tau}(p) = \theta_t \circ \theta_\tau(p),\ \forall t, \tau \in \mathbb{T}$.
3. *La aplicación $(t, p) \mapsto \theta_t(p)$ es continua.*

Entonces, a (P, θ) se le denomina sistema dinámico director actuando sobre P.

Definición 2.1.2. *Sea $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ un espacio métrico. Una aplicación cociclo asociada a un sistema dinámico director (P, θ) es una aplicación $\varphi : \mathbb{T}^+ \times P \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ satisfaciendo:*

1. *Una condición inicial: $\varphi(0, p, x) = x, \forall p \in P, x \in \mathbb{X}$.*
2. *La propiedad de cociclos: $\varphi(t + s, p, x) = \varphi(t, \theta_s(p), \varphi(s, p, x)),\ \forall t, s \in \mathbb{T}^+, p \in P, x \in \mathbb{X}$.*
3. *Ser Continua: $(t, p, x) \mapsto \varphi(t, p, x)$ es continua.*

Definición 2.1.3. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *y* (P, d_P) *sendos espacios métricos,* (P, θ) *un sistema dinámico director, y* φ *una aplicación cociclos. Entonces al par* (θ, φ) *se le denomina sistema dinámico no autónomo (NADS).*
La aplicación $\pi : \mathbb{T}^+ \times P \times \mathbb{X} \to P \times \mathbb{X}$ *dada por,*

$$\pi(t, p, x) = (\theta_t(p), \varphi(t, p, x)),$$

define un ADS sobre $\mathcal{X} = P \times \mathbb{X}$*, que se denomina flujo producto asimétrico (SPF) asociado al NADS* (θ, φ)*.*

2.2. Atractores

Definición 2.2.1. *Sea* (θ, φ) *un SPF sobre el espacio base* P*, y el espacio métrico* $\mathbb{X}$*. Un subconjunto* $\mathcal{M}$ *del espacio extendido* $\mathcal{X} = P \times \mathbb{X}$ *se dice un conjunto no autónomo, y para cada* $p \in P$*,*

$$\mathcal{M}_p := \{x \in \mathbb{X} : (p, x) \in \mathcal{M}\},$$

se dice la p*-fibra de* $\mathcal{M}$*.*
Un conjunto no autónomo $\mathcal{M}$ *se dice invariante (para* (θ, φ)*) si* $\varphi(t, p, \mathcal{M}_p) = \mathcal{M}_{\theta_t(p)}$*,* $\forall\ t \geq 0,\ p \in P$*, y positivamente invariante si* $\varphi(t, p, \mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_{\theta_t(p)},\ \forall\ t \geq 0,\ p \in P$*.*

En general las propiedades topológicas de las p-fibras las hereda el conjunto no autónomo.
Ahora podríamos definir un atractor global utilizando las definiciones del capítulo 1 para π, y utilizarlo como candidato para el sistema no autónomo dado por el SFP (θ, φ). Sin embargo, al hacerlo así, estaríamos incluyendo al espacio de parámetros como parte del espacio de estados.

Definición 2.2.2. *Sea* (θ, φ) *un SPF. Un conjunto* $\mathcal{A}$ *no autónomo (distinto del vacío) compacto e invariante se dice un atractor (retrospectivo) si*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_{\mathcal{X}}(\varphi(t, \theta_{-t}(p), D), \mathcal{A}_p) = 0, \ \text{para todo } D \text{ conjunto acotado de } \mathbb{X} \text{ y } p \in P.$$

Observación 2.2.1. *El objetivo de estos primeros capítulos es desarrollar el marco teórico en el que desarrollar la teoría de los sistemas dinámicos aleatorios, para ello es fundamental que la información que se use nos retrotaiga al pasado del sistema.*

Definición 2.2.3. *Sea (θ, φ) un SPF sobre el espacio métrico $\mathbb{X}$. Un subconjunto compacto no vacío B de $\mathbb{X}$ se dice absorbente (restrospectivamente), si para cada $p \in P$ y para todo subconjunto acotado D de $\mathbb{X}$, existe $T = T(p, D) > 0$ tal que $\varphi(t, \theta_{-t}(p), D) \subset B$ para todo $t \geq T$.*

Teorema 2.2.1. *Sea (θ, φ) un SPF sobre el espacio métrico $\mathbb{X}$ con un conjunto compacto B absorbente (retrospectivamente) tal que*

$$\varphi(t, p, B) \subset B, \ \forall t \geq 0, \ p \in P. \tag{2.1}$$

Entonces existe un único atractor $\mathcal{A}$ (retrospectivo), con fibras en B, unívocamente determinado por

$$\mathcal{A}_p = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \varphi(t, \theta_{-t}(p), B)}, \ \forall p \in P. \tag{2.2}$$

Además, si P es un espacio métrico compacto, entonces

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{p \in P} \operatorname{dist}\left(\varphi(t, p, D), \overline{\bigcup_{p \in P} \mathcal{A}_p} \right) = 0, \tag{2.3}$$

para todo subconjunto D acotado de $\mathbb{X}$.

Demostración. Probemos la primera parte del teorema.
Sean B y $\mathcal{A}_p$ dados por (2.1) y (2.2) respectivamente. Veamos que

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}(p), B), \mathcal{A}_p) = 0. \tag{2.4}$$

Supongamos que esto no es así, entonces existen $\epsilon > 0$, $t_j \to \infty$ y $x_j \in \varphi(t_j, \theta_{-t_j}(p), B) \subset B$ tal que $\operatorname{dist}(\varphi(t_j, \theta_{-t_j}(p), B), \mathcal{A}_p) > \epsilon$ para todo j. Pero por otra parte por la compacidad de B, existe una subsucesión de $\{x_j\}_j$ (que renombro de la misma manera), que converge en B a x_0. Ahora, $x_j \in \bigcup_{t \geq \tau} \varphi(t, \theta_{-t}(p), B)$ para todo $\tau \geq 0$ y $t_j \geq \tau$, por tanto

$$x_0 \in \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \varphi(t, \theta_{-t}(p), B)}, \ \forall \tau \geq 0,$$

y por tanto $x_0 \in \mathcal{A}_p$, lo cual contradice que no se cumpla (2.4).
Probemos ahora la φ-invarianza de $\mathcal{A}$.
El conjunto $F_\tau(p) := \bigcup_{s \geq \tau} \varphi(s, \theta_{-s}(p), B)$ está contenido en B para todo $\tau \geq 0$, y por definición $\mathcal{A}_{\theta_{-t}(p)} = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}$. Veamos que

$$\varphi(t, \theta_{-t}(p), \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}) = \bigcap_{\tau \geq 0} \varphi(t, \theta_{-t}(p), \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}).$$

Efectivamente, si $x \in \varphi(t, \theta_{-t}(p), \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))})$, entonces $x \in \bigcap_{\tau\geq 0} \varphi(t, \theta_{-t}(p), \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))})$. Veamos la otra inclusión.
Sea ahora $x \in \bigcap_{\tau\geq 0} \varphi(t, \theta_{-t}(p), \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))})$, entonces para todo $\tau \geq 0$ existe $x^\tau \in \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}$ tal que $x = \varphi(t, \theta_{-t}(p), x^\tau)$. Ahora, ya que $\{\overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}\}_{\tau\geq 0}$ es monótonamente decreciente, el conjunto $\{x^\tau\}_{\tau\geq 0}$ tiene un punto límite $\hat{x} = \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}$, y por continuidad $x = \varphi(t, \theta_{-t}(p), \hat{x})$, y $x \in \varphi(t, \theta_{-t}(p), \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))})$.
Tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\varphi(t, \theta_{-t}(p), \mathcal{A}_{\theta_{-t}(p)}) &= \bigcap_{\tau\geq 0} \varphi(t, \theta_{-t}(p), \overline{F_\tau(\theta_{-t}(p))}) \\
&\supset \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\varphi(t, \theta_{-t}(p), F_\tau(\theta_{-t}(p)))} \\
&= \bigcap_{\tau\geq 0} \bigcup_{s\geq\tau} \overline{\varphi(t, \theta_{-t}(p), \varphi(s, \theta_{-s-t}(p), B))} \\
&= \bigcap_{\tau\geq 0} \bigcup_{s\geq\tau} \overline{\varphi(t+s, \theta_{-t-s}(p), B)} \\
&= \bigcap_{\tau\geq 0} \bigcup_{s\geq\tau} \overline{\varphi(s, \theta_{-s}(p), B)} \supset \mathcal{A}_p.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{A}_p \subset \varphi(t, \theta_{-t}(p), \mathcal{A}_{\theta_{-t}(p)}), \ \forall p \in P, t \geq 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau, \theta_{-\tau}(p), \mathcal{A}_{\theta_{-\tau}(p)}) &\subset \varphi(\tau, \theta_{-\tau}(p), \varphi(t, \theta_{-\tau-t}(p), \mathcal{A}_{\theta_{-\tau-t}(p)})) \\
&= \varphi(t, \theta_{-t}(p), \varphi(\tau, \theta_{-\tau-t}(p), \mathcal{A}_{\theta_{-\tau-t}(p)})) \\
&\subset \varphi(t, \theta_{-t}(p), \varphi(\tau, \theta_{-\tau-t}(p), B)) \\
&\subset \varphi(t, \theta_{-t}(p), B),
\end{aligned}$$

y tenemos que

$$\varphi(t, \theta_{-t}(p), \mathcal{A}_{\theta_{-t}(p)}) \subset \mathcal{A}_p, \ \forall p \in P, t \geq 0.$$

□

2.3. Referencias

En la elaboración del capítulo he seguido [22].

Capítulo 3

El caso aleatorio

> La teoría de los sistemas dinámicos aleatorios se desarrolla introduciendo los instrumentos de la teoría de probabilidad en los modelos deterministas clásicos para representar la incertidumbre o poder tratar la complejidad. [12]

3.1. Formulación

Definición 3.1.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, y sea* $\theta = \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *una aplicación* $\theta : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \Omega$*, satisfaciendo*

1. $\theta_0(\omega) = \omega, \ \forall \omega \in \Omega.$

2. $\theta_{t+\tau}(\omega) = \theta_t \circ \theta_\tau(\omega), \ \forall t, \tau \in \mathbb{T}.$

3. *La aplicación* $(t, \omega) \mapsto \theta_t(\omega)$ *es medible en* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}, \mathcal{F})$*, y* $\theta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *(donde la anterior igualdad ha de entenderse como que* $\mathbb{P}(\theta_t(\omega)) = \mathbb{P}(\omega)$*).*

Entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \theta)$ *se denomina un sistema dinámico director.*

Pasemos ahora a la definición de RDS.

Definición 3.1.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$*. Un sistema dinámico aleatorio (continuo o diferenciable) (RDS) consiste en un par* (θ, φ) *con* θ *un sistema dinámico director (sobre el espacio de probabilidad) y una aplicación cociclo* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *satisfaciendo:*

1. *Una condición inicial:* $\varphi(0, \omega, x) = x, \forall \omega \in \Omega, x \in \mathbb{X}.$

2. *La propiedad de cociclos:* $\varphi(t + s, \omega, x) = \varphi(t, \theta_s(\omega), \varphi(s, \omega, x)), \ \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, x \in \mathbb{X}.$

3. *Ser Medible:* $(t, \omega, x) \mapsto \varphi(t, \omega, x)$ *es medible.*

4. Ser Continua (o diferenciable): $x \mapsto \varphi(t,\omega,x)$ *es continua (o diferenciable)* $\forall t \in \mathbb{R}^+$ *a.s.*

3.2. Atractores

Definición 3.2.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. Un conjunto aleatorio* C *sobre* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ *es un subconjunto medible de* $\mathbb{X} \times \Omega$ *con respecto a la* σ*-álgebra producto formada a partir de la* σ*-álgebra de (Borel de)* $\mathbb{X}$ *y* $\mathcal{F}$*. Además, dado un conjunto aleatorio* C*, definimos sus* ω*-fibras como*

$$C_\omega := \{x \in \mathbb{X} : (x,\omega) \in C\}.$$

En general, un conjunto aleatorio heredará las propiedades topológicas de sus fibras, y así será cerrado si sus fibras lo son, y compacto si sus fibras los son.

Definición 3.2.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, y sea* B *un conjunto aleatorio. El conjunto* ω*-límite de* B *está dado por*

$$\Gamma(B,\omega) := \bigcap_{T\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \varphi(t, \theta_{-t}(\omega), B_{\theta_{-t}(\omega)})}.$$

Por la definición anterior, el conjunto ω-límite de B también está caracterizado como

$$\{x \in \mathbb{X} : \exists\ t_n \to \infty,\ b_n \in B_{\theta_{-t_n}(\omega)},\ \text{tal que } x = \lim_{t_n\to\infty} \varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n)\}.$$

Definición 3.2.3. *Un conjunto aleatorio* C *se dice positivamente invariante si* $\varphi(t,\omega,C_\omega) \subset C_{\theta_t(\omega)}$ *para todo* $t > 0$*, e invariante si* $\varphi(t,\omega,C_\omega) = C_{\theta_t(\omega)}$ *para todo* $t > 0$*.*

Lema 3.2.1. *El conjunto* ω*-límite de un conjunto aleatorio* B *cualquiera es positivamente invariante, es decir,* $\varphi(t,\omega,\Gamma(B,\omega)) \subset \Gamma(B,\theta_t(\omega))$*.*

Demostración. Sea $y \in \Gamma(B,\omega)$, entonces existen $t_j \to \infty$ y $\{x_j\}_j$ tal que $x_j \in B_{\theta_{-t_j}(\omega)}$ tal que $y = \lim_{j\to\infty} \varphi(t_j, \theta_{-t_j}(\omega), x_j)$. Entonces para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(t,\omega,y) &= \varphi(t,\omega, \lim_{j\to\infty} \varphi(t_j, \theta_{-t_j}(\omega), x_j)) \\ &= \lim_{j\to\infty} \varphi(t + t_j, \theta_{-t-t_j}(\theta_t(\omega)), x_j),\end{aligned}$$

y $\varphi(t,\omega,y) \in \Gamma(B,\theta_t(\omega))$. □

Definición 3.2.4. *Sea (θ, φ) un RDS, y sean A y B dos conjuntos aleatorios. Decimos que A atrae (retrospectivamente) a B si a.s.*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}(\omega), B_{\theta_{-t}(\omega)}), A_\omega) = 0.$$

Como en el caso no autónomo, se usa la información del pasado del sistema, y la existencia de un atractor aleatorio está íntimamente relacionada con la existencia de un conjunto absorbente.

Definición 3.2.5. *Un conjunto aleatorio $K \subset \mathcal{B}$ se dice absorbente (retrospectivamente) para una familia de conjuntos aleatorios $\mathcal{B}$ si para todo $B \in \mathcal{B}$ y $\omega \in \Omega$ existe un $T(B, \omega) > 0$ tal que*

$$\varphi(t, \theta_{-t}(\omega), B_{\theta_{-t}(\omega)}) \subset K_\omega, \ \forall t \geq T(B, \omega).$$

El siguiente resultado conecta las propiedades del conjunto ω-límite de un conjunto B que es absorbido por un compacto K.

Proposición 3.2.1. *Sean K, B conjuntos aleatorios, con K absorbiendo B, y K compacto a.s. Entonces a.s.*

1. *$\Gamma(B, \omega)$ es no vacío y está contenido en K_ω, y por tanto es compacto.*

2. *$\Gamma(B, \omega)$ es invariante.*

3. *$\Gamma(B, \omega)$ atrae (retrospectivamente) a B.*

Demostración.

1. Sea $t_n \to \infty$ y $\{b_n\}_n \subset B_{\theta_{-t_n}(\omega)}$. Entonces existe $T(B, \omega)$, tal que para n suficientemente grande $\varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n) \in \mathcal{K}_\omega$, y por compacidad existe una subsucesión convergente (de $\{\varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n)\}_n$) que renombro de la misma manera y que converge a y en K_ω. Además por construcción $y \in \Gamma(B, \omega)$, y por tanto es no vacío. Además

$$\Gamma(B, \omega) \subset \bigcap_{\tau \geq T(B,\omega)} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \varphi(t, \theta_{-t}(\omega), B_{\theta_{-t}(\omega)})} \subset K_\omega,$$

y por tanto es compacto, ya que $\Gamma(B, \omega)$ es cerrado (es una intersección de cerrados decrecientes) contenida en un compacto.

2. Por el Lema 3.2.1, solo queda probar una de las inclusiones.
Sea $y \in \Gamma(B, \theta_s(\omega))$ para todo $s \geq 0$. Entonces

$$y = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, \theta_{-t_n+s}(\omega), b_n),$$

para $b_n \in B_{\theta_{-t_n+s}(\omega)}$ y $t_n \to \infty$. Y entonces

$$y = \lim_{n\to\infty} \varphi(s, \omega, \varphi(t_n - s, \theta_{-t_n+s}(\omega), b_n)).$$

Pero ya que K es absorbente, para n suficientemente grande, $\{\varphi(t_n - s, \theta_{-t_n+s}(\omega), b_n)\}_n$ está en K, que como además es compacto, tiene una subsucesión convergente en $\Gamma(B,\omega)$, y por tanto $\Gamma(B, \theta_s(\omega)) \subset \varphi(s, \omega, \Gamma(B,\omega))$.

3. Si $\Gamma(B,\omega)$ no atrajese a B, existirían $b_n \in B_{\theta_{-t_n}(\omega)}$ y $t_n \to \infty$, y $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(\varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n), \Gamma(B,\omega)) \geq \delta.$$

Pero por otra parte $\{\varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n)\}_n$ tiene una subsucesión convergente en $\Gamma(B,\omega)$, lo cual es una contradicción.

□

Proposición 3.2.2. *Sean $\mathcal{K}, B$ conjuntos aleatorios, con $\mathcal{K}$ absorbiendo B, y $\mathcal{K}$ compacto a.s. Entonces a.s. $\Gamma(B,\omega) \subset \Gamma(\mathcal{K},\omega)$. En particular, $\Gamma(\mathcal{K},\omega)$ es no vacío, y atrae a B.*

Demostración. Sea $y \in \Gamma(B,\omega)$, entonces

$$y = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n),$$

para $b_n \in B_{\theta_{-t_n}(\omega)}$ y $t_n \to \infty$. Fijemos ahora T, entonces

$$\varphi(t_n, \theta_{-t_n}(\omega), b_n) = \varphi(T, \theta_{-T}(\omega), \varphi(t_n - T, \theta_{-t_n}(\omega), b_n)).$$

Entonces para n suficientemente grande, $\varphi(t_n - T, \theta_{-t_n}(\omega), b_n) = \varphi(t_n - T, \theta_{-(t_n-T)}(\theta_{-T}(\omega)), b_n) \in \mathcal{K}_{\theta_{-T}(\omega)}$, lo cual implica que $y \in \Gamma(\mathcal{K},\omega)$. □

Definición 3.2.6. *Sea (θ,φ) un RDS, y supongamos que existe un conjunto compacto aleatorio $\mathcal{A}$ estrictamente invariante, que atrae a todo conjunto acotado determinista $B \subset \mathbb{X}$. Entonces a $\mathcal{A}$ se le llama el atractor global del RDS.*

Otra forma de definir conjuntos atractores es imponer la condición más fuerte, de que todos los conjuntos acotados aleatorios sean atraídos, en lugar, de la más débil, de solo atraer a los conjuntos acotados deterministas; sin embargo, en nuestras aplicaciones, con la condición más débil será suficiente.

Teorema 3.2.1. *Sea (θ,φ) un RDS, y supongamos que existe un compacto aleatorio $\mathcal{K}$ absorbiendo todo conjunto acotado determinista $B\subset\mathbb{X}$. Entonces*

$$\mathcal{A}_\omega = \overline{\bigcup_{B\subset\mathbb{X}} \Gamma(B,\omega)},$$

es un atractor global para el RDS, y es medible con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}^- = \sigma\{\varphi(s,\theta_{-t}(\omega),x) : x\in\mathbb{X},\ 0\le s\le t\}$.

Demostración. Probemos solo que es un atractor global (la demostración de la parte de la mensurabilidad se puede encontrar en [9], Teorema 3. 11). Para eso solo hay que probar la invarianza estricta y la compacidad de $\mathcal{A}$.
$\Gamma(B,\omega)\subset\mathcal{K}(\omega)$ a.s. por Proposición 3.2.1, por tanto $\mathcal{A}$ es compacto a.s. También, $\bigcup_{B\subset\mathbb{X}}\Gamma(B,\omega)$ es invariante por la Proposición 3.2.1. Por la continuidad de φ, $\mathcal{A}$ es positivamente invariante, pero por la compacidad de $\mathcal{A}$, es invariante. □

3.3. Medidas invariantes de conjuntos aleatorios

Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ el espacio (topológico) de las medidas de probabilidad equipado con la topología más fina (ω-topología) que hace continua la aplicación $\rho\in\mathcal{P}(\mathbb{X})\mapsto\int_{\mathbb{X}} f d\rho$, con $f:\mathbb{X}\mapsto\mathbb{R}$, una función continua y acotada.

Definición 3.3.1. *Una medida aleatoria es una aplicación medible $\mu:\Omega\mapsto\mathcal{P}(\mathbb{X})$, $\omega\mapsto\mu_\omega$. Dado un RDS (θ,φ), una medida invariante para φ es una medida aleatoria μ que cumple que*

$$\varphi(t,\omega,\cdot)\mu_\omega = \mu_{\theta_t(\omega)}.$$

Nótese que una medida aleatoria induce una medida sobre $\Omega\times\mathbb{X}$,

$$\mu(B) = \int_\Omega \mu_\omega(B(\omega))d\mathbb{P}(\omega), B\subset\Omega\times\mathbb{X}.$$

Teorema 3.3.1. *Supongamos que un RDS (θ,φ) tiene un atractor aleatorio global $\mathcal{A}$. Entonces toda medida de probabilidad μ, φ-invariante, está soportada por $\mathcal{A}$, es decir,*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_\Omega \mu_\omega(\mathcal{A}(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = 1.$$

Demostración. Tenemos que $\Gamma(K,\omega)\subset\mathcal{A}$ para todo acotado determinista K, por el Teorema 3.2.1. Por otra parte, para todo $\epsilon>0$ existe un compacto $K\subset\mathbb{X}$ (ya que $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n$) tal que $\mu(K\times\Omega)\ge 1-\epsilon$. Además $\mu(\Gamma(K,\omega))\ge\mu(K)$. Por tanto

$$\mu(\mathcal{A})\ge\mu(\Gamma(K,\omega))\ge\mu(K)\ge 1-\epsilon.$$

Y ya que ϵ es arbitrario, $\mu(\mathcal{A})=1$. □

3.4. Referencias

En la elaboración de este capítulo he seguido [9], y [6] para la sección 3.

Capítulo 4

El caso estocástico

4.1. Generación de sistemas dinámicos aleatorios

La idea en esta sección es que la solución de una SDE genera un RDS. Esto se lleva a cabo transformando la SDE en un RDS mediante un homeomorfismo, al cual nos referiremos como el conjugado del RDS. El reto es que para usar tales transformaciones, se necesita una expresión explícita de la solución.
Introducimos un tipo especial de proceso estocástico, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, que ha sido ampliamente usado en la literatura para obtener RDS.
Consideremos la ecuación diferencial estocástica unidimensional

$$dz(t) = -\lambda z(t)dt + dW_t, \tag{4.1}$$

para algún $\lambda > 0$.

Proposición 4.1.1. *Sea $\lambda > 0$. Existe un subconjunto $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-invariante $\overline{\Omega} \in \mathcal{F}$ de $\Omega = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en el que se cumple que:*

1. $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\omega(t)}{t} = 0$ *a.s.*
2. *La variable aleatoria dada por $z^*(\omega) := -\lambda \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau}\omega(\tau)d\tau$ está bien definida, y la aplicación*

$$(t, \omega) \mapsto z^*(\theta_t\omega) = -\lambda \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau}\theta_t(\omega(\tau))d\tau = -\lambda \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau}\omega(t+\tau)d\tau + \omega(t),$$

es una solución estacionaria de (4.1), con trayectorias continuas satisfaciendo:

a) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{|z^*(\theta_t\omega)|}{|t|} = 0$ *a.s.*

b) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t z^*(\theta_\tau\omega)d\tau = 0$ *a.s.*

c) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |z^*(\theta_\tau\omega)|d\tau < \infty$ *a.s.*

Bosquejo de la demostración. 1. Sigue de la ley de los logaritmos iterados (ver por ejemplo el teorema 9.23 de [18]):

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1\right\} = \mathbb{P}\left\{\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sqrt{2t\log\log 1/t}} = 1\right\} = 1.$$

2. El proceso $(\omega, t) \mapsto \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)}dW_\tau(\omega)$ es una solución de (4.1) (con $z(0) = 0$), y el resultado se sigue integrando por partes y observando que la estacionariedad es una consecuencia de la invarianza de la medida de Wiener, dW, respecto de $\{\theta_t\}_t$. El resto de propiedades se siguen del teorema ergódico y de la desigualdad de Burkholder (teorema 3.28 en [18]).

□

4.1.1. Conjugación

Proposición 4.1.2. *Sea φ un sistema dinámico aleatorio sobre un espacio de fases $\mathbb{X}$. Supongamos que la aplicación $T : \Omega \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ satisface:*

1. *La aplicación $T(\omega, \cdot)$ es un homeomorfismo sobre $\mathbb{X}$ para todo $\omega \in \Omega$.*

2. *Las aplicaciones $T(\cdot, x)$ y $T^{-1}(\cdot, x)$ son medibles para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Entonces, la aplicación $(t, \omega, x) \mapsto \phi(t, \omega, x) := T^{-1}(\theta_t(\omega), \varphi(t, \omega, T(\omega, x)))$, define un RDS (conjugado) (hemos de entender la anterior definición en el sentido de que $T^{-1}(\omega, T(\omega, x)) = x$).

Demostración. Primero,

$$T^{-1}(\theta_0(\omega), \varphi(0, \omega, T(\omega, x))) = T^{-1}(\omega, T(\omega, x)) = x.$$

Veamos que se cumple la propiedad de cociclos.

$$\begin{aligned}
\phi(t+\tau, \omega, x) &= T^{-1}(\theta_{t+\tau}(\omega), \varphi(t+\tau, \omega, T(\omega, x))) \\
&= T^{-1}(\theta_t(\theta_\tau(\omega)), \varphi(t, \theta_\tau(\omega), \varphi(\tau, \omega, T(\omega, x))) \\
&= \phi(t, \theta_\tau(\omega), \phi(\tau, \omega, x)).
\end{aligned}$$

□

Ilustremos cómo una SDE con ruido aditivo o ruido lineal multiplicativo la podemos convertir en un RDS.

4.1.1.1. SDE con ruido aditivo.

Consideremos una SDE con ruido aditivo de la forma

$$dx(t,\omega) = f(x)dt + dW_t,\ \ x(0,\omega) = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

y supongamos que f es localmente Lipschitz o diferenciable con continuidad, para garantizar solución local a (4.2). Hagamos el cambio de variable

$$y(t,\omega) = x(t,\omega) - z^*(\theta_t(\omega)), \tag{4.3}$$

con z^* definida en la proposición 4.1.1.
Entonces, primero nótese que

1. $y(0,\omega) = x(0,\omega) - z^*(\omega) = x_0 - z^*(\omega)$.
2. $W_t(\omega) = \omega(t)$.

Ahora

$$\begin{aligned} dy(t,\omega) &= dx(t,\omega) - dz^* \\ &= f(x(t,\omega))dt + dW_t(\omega) - (-\lambda z^*(\theta_t(\omega))dt + dW_t(\omega)) \\ &= (f(x(t,\omega)) + \lambda z^*(\theta_t(\omega)))dt \\ &= (f(y(t,\omega) + z^*(\theta_t(\omega))) + \lambda z^*(\theta_t(\omega)))dt, \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{dy}{dt}(t,\omega) = f(y(t,\omega) + z^*(\theta_t(\omega))) + \lambda z^*(\theta_t(\omega)). \tag{4.4}$$

La ecuación (4.4) es una ecuación diferencial aleatoria, y si las hipótesis sobre f son suficientes, se genera un RDS φ, y por la proposición 4.1.2, podemos obtener un RDS (conjugado) para la ecuación (4.2).
En efecto, la aplicación $T : \Omega \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, definida por

$$T(\omega, x) := x - z^*(\omega),$$

satisface las hipótesis de la proposición 4.1.2. Por tanto,

$$\begin{aligned} \phi(t,\omega,x_0) &= T^{-1}(\theta_t(\omega), \varphi(t,\omega,T(\omega,x_0))) \\ &= T^{-1}(\theta_t(\omega), \varphi(t,\omega,x - z^*(\omega))) \\ &= y(t,\omega,x_0 - z^*(\omega)) + z^*(\omega) \\ &= x(t,\omega,x_0), \end{aligned}$$

es un RDS para la SDE (4.2).

4.1.1.2. SDE con ruido lineal multiplicativo.

Consideremos una SDE de la forma

$$dx(t, \omega) = f(x)dt + \sigma x \circ dW_t, \;\; x(0, \omega) = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

y supongamos que f es localmente Lipschitz o diferenciable con continuidad, para garantizar solución a (4.2). Hagamos el cambio de variable

$$y(t, \omega) = e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} x(t, \omega),$$

con z^* definida en la proposición 4.1.1.
Entonces, primero nótese que

1. $y(0, \omega) = x(0, \omega)e^{-\sigma z^*(\omega)} = x_0 e^{-\sigma z^*(\omega)}$.

Ahora

$$\begin{aligned}
dy(t, \omega) &= e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} dx(t, \omega) - \sigma e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} x(t, \omega) \circ dz^*(\theta_t(\omega)) \\
&= e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} \{ f(x(t, \omega))dt + \sigma x(t, \omega) \circ dW_t(\omega) \} \\
&- \sigma e^{-z^*(\theta_t(\omega))} x(t, \omega) \circ (-\lambda z^*(\theta_t(\omega)) + dW_t(\omega)) \\
&= e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} (f(x(t, \omega)) + \lambda z^*(\theta_t(\omega)) x(t, \omega))dt \\
&= (e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} f(e^{\sigma z^*(\theta_t(\omega))} y(t, \omega)) + \lambda z^*(\theta_t(\omega)) y(t, \omega))dt.
\end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{dy}{dt}(t, \omega) = e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))} f(e^{\sigma z^*(\theta_t(\omega))} y(t, \omega)) + \lambda z^*(\theta_t(\omega)) y(t, \omega). \tag{4.6}$$

La ecuación (4.6) es una ecuación diferencial aleatoria, y si las hipótesis sobre f son suficientes, se genera un RDS φ, y por la proposición 4.1.2, podemos obtener un RDS (conjugado) para la ecuación (4.2).
En efecto, la aplicación $T : \Omega \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, definida por

$$T(\omega, x) := e^{-\sigma z^*(\omega)} x,$$

satisface las hipótesis de la proposición 4.1.2. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\phi(t, \omega, x_0) &= T^{-1}(\theta_t(\omega), \varphi(t, \omega, T(\omega, x_0))) \\
&= T^{-1}(\theta_t(\omega), y(t, \omega, x_0 e^{-\sigma z^*(\omega)})) \\
&= e^{\sigma z^*(\omega)} y(t, \omega, x_0 e^{-\sigma z^*(\omega)}) \\
&= x(t, \omega, x_0),
\end{aligned}$$

es un RDS para la SDE (4.5).

4.2. Referencias

En la elaboración de este capítulo he seguido [3], y [4] para la demostración de la proposición 4.1.1.

Capítulo 5

Modelos y aplicaciones

5.1. El modelo SIR

5.1.1. El caso autónomo

Modelar la propagación de enfermedades es una herramienta útil en el control de su propagación y en el diseño de campañas de vacunación.
Supongamos que la población está dividida en tres segmentos: Sanos (susceptibles de ser contagiados), que denoto por $S(t)$, infectados (contagiados), que denoto por $I(t)$, y recuperados (no susceptibles de contagio), que denoto por $R(t)$: SIR.
Escribamos nuestro modelo (ver [19], [20], [21]):

1. $S(t) + I(t) + R(t) = N$, es constante.

2. La proporción de nacimientos y muertes es igual, y la denotamos por ν. Los recién nacidos pueden ser infectados (todos nacen sanos).

3. γ es la fracción de individuos infectados que se recupera.

4. β es el factor de contacto entre los sanos y los infectados, y por tanto mide la tasa de contagios.

Entonces tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \nu(S+I+R) - \frac{\beta}{N}SI - \nu S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \nu I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \nu R. \end{cases} \tag{5.1}$$

De $S(t) + I(t) + R(t) = N$, constante, el sistema se reduce a

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \nu N - \frac{\beta}{N}SI - \nu S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \nu I - \gamma I \end{cases} \tag{5.2}$$

La solución de equilibrio (S^*, I^*) verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \nu N - \frac{\beta}{N} S^* I^* - \nu S^* \\ 0 = \frac{\beta}{N} S^* I^* - \nu I^* - \gamma I^*. \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Tenemos dos soluciones de equilibrio:

1. $(S^*, I^*) = (N, 0)$. ¡Todos sanos!
2. $(S^*, I^*) = \left(\frac{N(\nu+\gamma)}{\beta}, \nu N \left(\frac{1}{\nu+\gamma} - \frac{1}{\beta} \right) \right)$.

Analicemos ahora el comportamiento asintótico del sistema (ver el Teorema A.1.1). Para ello calculamos el jacobiano

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{N} I - \nu & \frac{\beta}{N} S \\ -\frac{\beta}{N} I & \frac{\beta}{N} S - \nu - \gamma \end{pmatrix}.$$

1. Si $\nu + \gamma > \beta$ tiene una sola solución estacionaria $(N, 0)$ (la otra no tiene sentido al salir números negativos) que es asintóticamente estable ya que el jacobiano evaluado en $(N, 0)$ es

   $$J(N, 0) = \begin{pmatrix} -\nu & -\beta \\ 0 & \beta - \nu - \gamma \end{pmatrix},$$

   cuyos autovalores son negativos.

2. Si $\nu + \gamma < \beta$ tenemos dos soluciones de equilibrio. Ahora $(N, 0)$ es inestable ya que tiene un autovalor positivo. Sin embargo la otra solución estacionaria es asintóticamente estable al tener los autovalores con parte real negativa. Esto significa que la enfermedad es endémica, y conviven individuos sanos, e infectados.

Sumando las ecuaciones de (5.2) tenemos que

$$\frac{d(S+I)}{dt} = \nu N - \nu(S+I) - \gamma I \leq \nu N - \nu(S+I),$$

es decir,

$$(N - (S+I))' = -\nu(N - (S+I)).$$

Por tanto

$$S(t) + I(t) \leq N + (S_0 + I_0 - N)e^{-\nu t}, I(0) = I_0,\ S(0) = S_0.$$

Esto implica que para cada $\epsilon > 0$

$$K_\epsilon := \{(S, I) \in \mathbb{R}^2_+ : S + I \leq N + \epsilon\},$$

es un conjunto atractivo para el sistema dinámico φ generado por la solución de (5.2). Por tanto φ posee un atractor global (ver el Teorema 1.3.1) $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}^2_+$ tal que:

1. Cuando $\nu + \gamma > \beta$, el atractor $\mathcal{A}$ consiste en un único punto.
2. Cuando $\nu + \gamma < \beta$, el atractor $\mathcal{A}$ consiste en dos puntos, y en las órbitas heteroclínicas entre ellos.

5.1.2. El caso aleatorio

En el modelo autónomo $N = I + S + R$ permanecía constante debido a que la tasa de nacimiento y muerte es la misma. Consideremos un modelo más realista en el que la tasa reproductiva tiene un término aleatorio, por tanto, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales aleatorias

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t,\omega) = \Lambda(\theta_t(\omega)) - \nu S(t) - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \\ \frac{dI}{dt}(t,\omega) = -(\nu+\gamma)I(t) + \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \\ \frac{dR}{dt}(t,\omega) = \gamma I(t) - \nu R(t). \end{cases} \tag{5.4}$$

Y el término aleatorio varía del siguiente modo,

$$\Lambda(\theta_t(\omega)) \in \Lambda[1-\epsilon, 1+\epsilon], \; \epsilon \in (0,1), \; \Lambda > 0. \tag{5.5}$$

Lema 5.1.1. *El conjunto* $\mathbb{R}^3_+ = \{(S,I,R) \in \mathbb{R}^3_+ : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$ *es (positivamente) invariante para el sistema* (5.4) *para cada* $\omega \in \Omega$ *fijo.*

Demostración. Sobre la frontera de $\mathbb{R}^3_+$ el campo de vectores apunta hacia el interior de $\mathbb{R}^3_+$. □

Teorema 5.1.1. *Para cada* $\omega \in \Omega$ *y* $t_0 \in \mathbb{R}$ *y dato inicial* $(S(t_0, I(t_0), R(t_0)) \in \mathbb{R}_3^+$*, el sistema* (5.4) *admite una única solución no negativa acotada* $u(\cdot, t_0, \omega, u_0) \in C^1([t_0, +\infty), \mathbb{R}_3^+)$ *verificando* $u(t_0, t_0, \omega, u_0) = u_0$.
Además la solución genera un sistema dinámico aleatorio $\varphi(t, \omega, \cdot)$ *definido por*

$$\varphi(t,\omega,u_0) := u(t,0,\omega,u_0), \; \forall t \geq 0, \; u_0 \in \mathbb{R}_3^+, \; \omega \in \Omega.$$

Demostración. El sistema puede ser reescrito como $\frac{du}{dt} = f(u, \theta_t(\omega))$, con $f(\cdot, \theta_t(\omega)) \in C(\mathbb{R}^3_+ \times [t_0, \infty], \mathbb{R}^3_+)$, y diferenciable con continuidad respecto de u, entonces el sistema posee una única solución local.
Sumando las tres ecuaciones obtenemos

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda(\theta_t(\omega)) - \nu N(t).$$

Por tanto, para la condición inicial $N(t_0) = N_0$,

$$N(t, t_0, \omega, N_0) = N_0 e^{-\nu(t-t_0)} + e^{-\nu t} \int_{t_0}^{t} \Lambda(\theta_s(\omega)) e^{\nu s} ds.$$

Ahora, observando que

$$\Lambda(1-\epsilon)e^{-\nu t}\int_{t_0}^{t} e^{\nu s}ds \leq e^{-\nu t}\int_{t_0}^{t}\Lambda(\theta_s(\omega))e^{\nu s}ds \leq \Lambda(1+\epsilon)e^{-\nu t}\int_{t_0}^{t} e^{\nu s}ds,$$

tenemos que

$$\Lambda(1-\epsilon)\frac{1}{\nu}(1-e^{-\nu(t-t_0)}) \leq e^{-\nu t}\int_{t_0}^{t}\Lambda(\theta_s(\omega))e^{\nu s}ds \leq \Lambda(1+\epsilon)\frac{1}{\nu}(1-e^{-\nu(t-t_0)}).$$

Y finalmente

$$\frac{\Lambda(1-\epsilon)}{\nu}+\left[N_0-\frac{\Lambda(1-\epsilon)}{\nu}\right]e^{-\nu(t-t_0)} \leq N \leq \frac{\Lambda(1+\epsilon)}{\nu}+\left[N_0-\frac{\Lambda(1+\epsilon)}{\nu}\right]e^{-\nu(t-t_0)}.$$

Por lo cual N es acotada, y la solución u puede ser extendida a una solución global en $C^1([t_0,\infty],\mathbb{R}^3_+)$.
Además

$$u(t+t_0,t_0,\omega,u_0)=u(t,0,\theta_{t_0}(\omega),u_0),$$

por lo que podemos definir

$$\varphi(t,\omega,u_0)=u(t,0,\omega,u_0),$$

que nos genera un RDS. □

Teorema 5.1.2. *Existe un conjunto aleatorio compacto K absorbiendo todo conjunto acotado determinista B, además para todo $0<\eta<\Lambda(1-\epsilon)$, el conjunto K puede ser elegido como el conjunto determinista*

$$K_\eta := \left\{(S,I,R)\in\mathbb{R}_3^+ : \frac{\Lambda(1-\epsilon)-\eta}{\nu} \leq S+I+R \leq \frac{\Lambda(1+\epsilon)+\eta}{\nu}\right\},\ \textit{para todo}\ \omega\in\Omega.$$

Demostración. Tenemos que $N'\geq 0$ sobre $\frac{\Lambda(1-\epsilon)-\eta}{\nu}$, y $N'\leq 0$ sobre $\frac{\Lambda(1+\epsilon)+\eta}{\nu}$, y K_η es positivamente invariante.
Además, de

$$N(t,\theta_{-t}(\omega),N_0) \leq \sup_{N_0\in B} N_0 e^{-\nu(t-t_0)} + \frac{\Lambda(1+\epsilon)}{\nu}(1-e^{-\nu(t-t_0)}),$$

existe un $T(B,\omega)$ tal que para todo $t\geq T(B,\omega)$, tenemos $\varphi(t,\theta_{-t}(\omega),u_0)\subset K_\eta$ para todo $u_0\in B$. □

Teorema 5.1.3. *El sistema dinámico aleatorio generado por el sistema* (5.4) *posee un atractor aleatorio global.*

Demostración. Ver el teorema 3.2.1. □

5.1.3. El caso estocástico

5.1.3.1. Término aditivo de ruido blanco

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas,

$$\begin{cases} dS = \left(\Lambda - \nu S(t) - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}\right) dt + \sigma dW \\ dI = \left(-(\nu+\gamma)I(t) + \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}\right) dt \\ dR = (\gamma I(t) - \nu R(t))\, dt. \end{cases} \tag{5.6}$$

Entonces, si llamamos a $\Lambda - \nu S(t) - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}$, $f(t)$, tenemos que $S(t) = S_0 + \int_0^t f(s)ds + \sigma W(t)$ puede ser negativo para una elección adecuada de t, y σ, siendo el modelo, por tanto, no realista.

5.1.3.2. Término lineal multiplicativo de ruido blanco

Consideremos ahora el caso

$$\begin{cases} dS = \left(\Lambda - \nu S(t) - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}\right) dt + \sigma S \circ dW \\ dI = \left(-(\nu+\gamma)I(t) + \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}\right) dt + \sigma I \circ dW \\ dR = (\gamma I(t) - \nu R(t))\, dt + \sigma R \circ dW, \end{cases} \tag{5.7}$$

en el que añadimos un término lineal de ruido blanco multiplicativo en la interpetación de Stratonovich. Ahora, transformaremos el sistema (5.7) en un sistema de ecuaciones diferenciales, cuyos coeficientes son aleatorios.
Consideremos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (ver sección 4.1.1)

$$z^*(\theta_t(\omega)) = -\int_{-\infty}^0 e^s \theta_t(\omega(s))ds, \;\; t \in \mathbb{R}, \;\; \omega \in \Omega,$$

con θ la representación canónica del sistema director de un espacio de Wiener.
Haciendo el cambio de variables

$$\tilde{S}(t) = S(t)e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))}, \;\; \tilde{I}(t) = I(t)e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))}, \;\; \tilde{R}(t) = R(t)e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))},$$

tenemos el sistema dinámico aleatorio de ecuaciones diferenciales aleatorias, dado por

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{S}(t,\omega)}{dt} = \Lambda e^{-\sigma z^*} - \nu \tilde{S}(t) - \beta \frac{\tilde{S}(t)\tilde{I}(t)}{\tilde{N}(t)} + \sigma \tilde{S} z^* \\ \frac{d\tilde{I}(t,\omega)}{dt} = -(\nu+\gamma)\tilde{I}(t) + \beta \frac{\tilde{S}(t)\tilde{I}(t)}{\tilde{N}(t)} + \sigma \tilde{I} z^* \\ \frac{d\tilde{R}(t,\omega)}{dt} = \gamma \tilde{I}(t) - \nu \tilde{R}(t) + \sigma \tilde{R} z^*. \end{cases} \tag{5.8}$$

Sumando las tres ecuaciones de (5.8) tenemos que

$$\frac{d\tilde{N}(t,\omega)}{dt} = \Lambda e^{-\sigma z^*} - \nu\tilde{N}(t) + \sigma\tilde{N}z^* = \Lambda e^{-\sigma z^*} - (\nu - \sigma z^*)\tilde{N}(t), \tag{5.9}$$

y para todo dato inicial N_0 tenemos que

$$N(t,\omega,N_0) = N_0 e^{-\int_0^t(\nu-\sigma z^*(\theta_s\omega))ds} + \int_0^t \Lambda e^{-\sigma z^*(\theta_s\omega)} e^{-\int_s^t(\nu-\sigma z^*(\theta_\tau\omega))d\tau} ds.$$

Ahora, haciendo el cambio $\omega \to \theta_{-t}(\omega)$,

$$N(t,\theta_{-t}\omega,N_0) = N_0 e^{-\int_{-t}^0(\nu-\sigma z^*(\theta_s\omega))ds} + \int_{-t}^0 \Lambda e^{-\sigma z^*(\theta_s\omega)} e^{-\int_s^0(\nu-\sigma z^*(\theta_\tau\omega))d\tau} ds,$$

que converge a

$$N^*(\omega) = \Lambda \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma z^*(\theta_s\omega)} e^{-\int_s^0(\nu-\sigma z^*(\theta_\tau\omega))d\tau} ds,$$

el atractor aleatorio, que posee sentido gracias a la Proposición 4.1.1.

5.2. El modelo de Lorenz-84

5.2.1. El caso autónomo

Un modelo de circulación atmosférica fue introducido por Lorenz en 1984 [15], consistente en tres ecuaciones diferenciales autónomas no lineales.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - y^2 - z^2 + aF \\ \frac{dy}{dt} = -y + yx - bxz + G \\ \frac{dz}{dt} = -z + bxy + xz \end{cases} \tag{5.10}$$

Siguiendo a Lorenz:

> La variable independiente t representa el tiempo, mientras que x representa la intensidad de la corriente de viento del oeste simétrica que rodea el globo, y también el gradiente de temperatura hacia el polo, que se supone que está en equilibrio permanente con él. Las variables y y z representan las fases de coseno y seno de una cadena de remolinos superpuestos a gran escala, que transportan calor hacia los polos a una velocidad proporcional al cuadrado de su amplitud, y no transportan ningún momento angular. Los términos xy y xz representan la amplificación de los remolinos a través de la interacción con la corriente del oeste. Los términos $-bxz$ y bxy, con $b > 0$, representan el desplazamiento de los remolinos por la corriente del oeste. Los términos lineales representan amortiguamiento mecánico y térmico. El tiempo de amortiguación de los remolinos se ha elegido como unidad de tiempo, mientras que el coeficiente $a > 0$, si es menor que la unidad, permite que la corriente del oeste se amortigüe menos rápidamente que los remolinos. Los términos constantes aF y G representan fuerzas termales simétricas y asimétricas. [15]

Puesto que el campo de vectores del sistema (5.10) es continuamente diferenciable, se garantiza existencia local y unicidad de las soluciones. Como además, las soluciones permanecen acotadas (como veremos), están definidas en todo tiempo.
Puesto que tenemos una solución global, tenemos un sistema dinámico. Para probar la existencia de un atractor, es suficiente probar la existencia de un conjunto acotado absorbente.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt} \\
&= 2(-ax^2 - y^2 - z^2 + aFx + yG) \\
&\leq -ax^2 - y^2 - 2z^2 + aF^2 + G^2 \\
&\text{(hemos utilizado que } a(x-F)^2 \geq 0, (y-G)^2 \geq 0) \\
&\leq -\mu(x^2+y^2+z^2) + aF^2 + G^2.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &\leq k^2 e^{-\mu t} + \frac{aF^2+G^2}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \\
&\leq k^2 e^{-\mu t} + \frac{aF^2+G^2}{\mu},
\end{aligned}$$

con $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \leq k^2$. Por tanto existe un $T > 0$ tal que

$$x^2+y^2+z^2 \leq \frac{aF^2+G^2}{\mu} + \epsilon \ \forall t \geq T.$$

Y por tanto para cada $\epsilon > 0$

$$K_\epsilon = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq \frac{aF^2+G^2}{\mu} + \epsilon \right\},$$

es un conjunto cerrado absorbente para φ. Entonces, existe un atractor global para nuestro sistema dinámico. Se puede probar que cuando $G = 0$, el atractor consiste en un único punto $(F, 0, 0)$, y si $G \neq 0$, el atractor es caótico (ver [3]).

5.2.2. El caso aleatorio

Consideremos que las fuerzas externas F, G pueden variar aleatoriamente,

$$\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = -ax - y^2 - z^2 + aF(\theta_t\omega) \\
\frac{dy}{dt} = -y + yx - bxz + G(\theta_t\omega) \\
\frac{dz}{dt} = -z + bxy + xz.
\end{cases} \tag{5.11}$$

Lema 5.2.1. *Para todo dato inicial* $u_0 \in \mathbb{R}^3$*, la solución (que existe, ya que el campo de vectores es continuo en* t*, y clase uno en el resto de la variables)* $u(\cdot) := u(\cdot, t_0, \omega, u_0)$ *de* (5.11) *satisface*

$$|u(t, t_0, \omega, u_0)|^2 \leq e^{-l(t-t_0)}|u_0|^2 + e^{-lt} \int_{-\infty}^{t} e^{ls} F^2(\theta_s \omega) ds + a e^{-lt} \int_{-\infty}^{t} e^{ls} G^2(\theta_s \omega) ds,$$

para todo $t \geq t_0$ *y* $l = \text{mín}\{a, 1\}$*.*

Demostración. Razonando como en el caso autónomo

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + l|u|^2 \leq aF^2(\theta_t(\omega)) + G^2(\theta_t(\omega)).$$

Y multiplicando por e^{lt},

$$\frac{d}{dt}(e^{lt}|u|^2) \leq a e^{lt} F^2(\theta_t(\omega)) + e^{lt} G^2(\theta_t(\omega)).$$

Integrando entre t_0 y t,

$$e^{lt}|u|^2 \leq e^{lt_0}|u_0|^2 + a \int_{t_0}^{t} e^{ls} F^2(\theta_s(\omega)) ds + \int_{t_0}^{t} e^{ls} G^2(\theta_s(\omega)) ds.$$

□

Si $\int_{-\infty}^{t} e^{ls} F^2(\theta_s(\omega)) ds$, $\int_{\infty}^{t} e^{ls} G^2(\theta_s(\omega)) ds < \infty$, entonces podemos definir una solución globalmente, y tenemos un (θ, φ) RDS,

Teorema 5.2.1. *La familia* $\{\overline{B(0, \rho_l(\omega))}\}_\omega$ *con*

$$\rho_l^2(\omega) = 1 + a \int_{-\infty}^{0} e^{ls} F^2(\theta_s \omega) ds + \int_{-\infty}^{0} e^{ls} G^2(\theta_s \omega) ds,$$

es una familia absorbente (retrospectivamente) para (θ, φ)*. Además, existe un atractor aleatorio (retrospectivo) para* (θ, φ)*.*

Demostración. Razonando como en el Lema 5.2.1,

$$|\varphi(t, \theta_{-t}(\omega), u_0)|^2 \leq e^{-lt}|u_0|^2 + a \int_{-\infty}^{0} e^{ls} F^2(\theta_s \omega) ds + \int_{-\infty}^{0} e^{ls} G^2(\theta_s \omega) ds.$$

Y tomando u_0 perteneciente a una familia de conjuntos acotados deterministas, y haciendo tender t a infinito, obtenemos el resultado. □

5.3. La ecuación logística

5.3.1. El caso autónomo

Consideremos la ecuación $\frac{dx}{dt} = (\lambda - \mu - \alpha x)x$, y $x(0) = x_0 > 0$ (con λ la tasa de nacimientos y μ la de mortalidad, y α el factor logístico). Es bien conocido que,

$$x(t) = \frac{\frac{\lambda-\mu}{\alpha} x_0}{\frac{\lambda-\mu}{\alpha} e^{-(\lambda-\mu)t} + x_0 \left(1 - e^{-(\lambda-\mu)t}\right)}.$$

Y tenemos que

1. Si $\lambda > \mu$, entonces $x(t) \to \frac{\lambda-\mu}{\alpha}$.
2. Si $\lambda < \mu$, entonces $x(t) \to 0$ si $x_0 \neq \frac{\lambda-\mu}{\alpha}$.
3. Si $\lambda = \mu$, entonces $x(t) = x_0 \ \forall t$.

5.3.2. El caso estocástico

5.3.2.1. Ruido proporcional multiplicativo (Ito).

Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica, en el sentido de Ito

$$dX_t = ((\lambda - \mu - \alpha X_t)X_t)\, dt + \sigma X_t dW_t, \tag{5.12}$$

que escrita en el sentido de Stratonovich queda

$$dX_t = \left((\lambda - \mu - \alpha X_t)X_t - \frac{\sigma^2}{2} X_t\right) dt + \sigma X_t \circ dW_t. \tag{5.13}$$

Aplicando la transformación $\tilde{X}_t = X_t e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))}$ (ver sección 4.1.1), siendo θ_t el flujo generado por el proceso de Wiener, y z^* el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, tenemos

$$\frac{d\tilde{X}_t}{dt}(t,\omega) = \left((\lambda - \mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma z^*(\theta_t(\omega))\right) \tilde{X}_t - e^{z^*(\theta_t(\omega))} \tilde{X}_t^2, \tag{5.14}$$

cuya solución (que en este caso existe) genera un sistema dinámico aleatorio $\varphi(t, \omega, \tilde{X}_{t,0}) = \tilde{X}_t(t, 0, \omega, \tilde{X}_{t,0})$, con $\tilde{X}_t(0) = \tilde{X}_{t,0}$.
La ecuación (5.14) es de tipo Bernoulli, y haciendo el cambio de variable $Y_t = \tilde{X}_t^{-1}$, se convierte en la ecuación lineal,

$$\frac{dY_t}{dt} = -(\lambda - \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma z^*)Y_t + e^{\sigma z^*}, \tag{5.15}$$

cuya solución es

$$Y_t = Y_0 e^{-(\lambda-\mu-\frac{\sigma^2}{2})t-\sigma\int_0^t z^*(\theta_s(\omega))ds} + \int_0^t e^{(s-t)+\sigma z^*(\theta_s(\omega))-\sigma\int_s^t z^*(\theta_r(\omega))dr} ds, \tag{5.16}$$

que proporciona una expresión explícita para φ. Si $\frac{\sigma^2}{2} > \lambda - \mu$,

$$Y_t \geq Y_0 e^{-(\lambda-\mu-\frac{\sigma^2}{2})t-\sigma\int_0^t z^*(\theta_s(\omega))ds}, \tag{5.17}$$

y haciendo la transformación $\omega \to \theta_{-t}(\omega)$

$$Y_t \geq Y_0 e^{-(\lambda-\mu-\frac{\sigma^2}{2})t-\sigma\int_{-t}^0 z^*(\theta_s(\omega))ds}, \tag{5.18}$$

que tiende a ∞ cuando t tiende a ∞. Por tanto

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,t_0,\tilde{X}_{t,0}) = \varphi(t,\theta_{-t}(\omega),t_0,\tilde{X}_{t,0}) = 0,$$

y 0 es el atractor global del sistema.

5.3.2.2. Ruido proporcional multiplicativo (Stratonovich).

Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica, en el sentido de Stratonovich

$$dX_t = ((\lambda - \mu - \alpha X_t)X_t)\,dt + \sigma X_t \circ dW_t. \tag{5.19}$$

Entonces, haciendo el análisis anterior

$$Y_t = Y_0 e^{-(\lambda-\mu)t-\sigma\int_0^t z^*(\theta_s(\omega))ds} + \int_0^t e^{(s-t)+z^*(\sigma\theta_s(\omega))-\sigma\int_s^t z^*(\theta_r(\omega))dr} ds. \tag{5.20}$$

Ahora, haciendo la transformación $\omega \to \theta_{-t}(\omega)$,

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = \int_{-\infty}^0 e^{s+z^*(\sigma\theta_s(\omega))-\sigma\int_s^0 z^*(\theta_r(\omega))dr} ds.$$

Si a este límite lo denoto por $a(\omega)$, el sistema tiende a $a(\omega)^{-1}$.

5.3.2.3. La ecuación de Fokker-Planck

En el Teorema 3.3.1 veíamos que el atractor de un RDS era el soporte de las medidas invariantes del sistema. Es un lugar común de las SDE, estudiar la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck asociada a la SDE. Ésta, es una medida invariante del sistema (ver el apéndice C). Veamos como el soporte de esta medida está relacionado con el atractor del RDS asociado a la SDE.

Si calculo la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck (ver ecuación (C.3)) asociada a la SDE (5.12), tenemos

$$p_s(x) = \frac{\tilde{C}}{x^2} e^{\frac{2}{\sigma^2}\int^x \frac{(\lambda-\mu-\alpha u)u}{u^2}du} = Cx^{\frac{2(\lambda-\mu)-2\sigma^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}x},$$

con C un factor de normalización. Formalmente observamos que la distribución de probabilidad no es integrable en el cero si $\frac{\sigma^2}{2} > \lambda - \mu$. Por otra parte, si la (5.12) la interpretamos en el sentido de Stratonovich, la solución estacionaria de Fokker-Planck sería

$$p_s(x) = Cx^{\frac{2(\lambda-\mu)-\sigma^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}x},$$

y la integrabilidad no dependería de σ.

5.4. Una aproximación RDS a modelos cosmológicos

Las ecuaciones de campo de Einstein $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$ con la métrica de Robertson-Walker $ds^2 = -dt^2 + C^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right)$, y con el tensor de energía-momento dado por $T_{\mu\nu} = (p+g)\delta^0_\mu\delta^0_\nu + pg_{\mu\nu}$ pueden ser escritas utilizando el parámetro de Hubble ($H := \frac{C'}{C}$) como (ver [5]. 5.2.)

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{5.21}$$

Si nos restringimos (ver [17]) a modelos planos (y entonces $k = 0$), y utilizamos $p = \xi\rho$, con ξ un ruido blanco (ver [16]) tenemos

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H^2(1+\xi). \tag{5.22}$$

El modelo determinista que nosotros proponemos utiliza que $3p + \rho = 0$, y por tanto, por (5.21) $C(t) = at + b$ con $C(0) = b > 0$, y $C'(0) > 00$, tenemos $Ht \to 1$ si $t \to \infty$. Por tanto, en vista de que el modelo determinista tiene $\xi = -\frac{1}{3}$, escribiendo $\xi' = \xi + \frac{1}{3}$, tenemos

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H^2(\frac{2}{3} + \xi'). \tag{5.23}$$

Podemos escribir la ecuación anterior como una SDE,

$$dH = -H^2dt - \frac{3}{2}H^2dW, \tag{5.24}$$

con W un proceso de Wiener.

5.4.1. Análisis asintótico

Veamos que el comportamiento asintótico de (5.24) recupera el comportamiento asintótico determinista en el sentido de Ito, y presenta blow up con probabilidad en $(0, 1)$, en el sentido de Stratonovich.

5.4.1.1. En el sentido de Stratonovich

Haciendo $x := \frac{1}{H}$, podemos escribir (5.23) en el sentido de Stratonovich como

$$dx = dt + \frac{3}{2} \circ dW, \tag{5.25}$$

que escrita en el sentido de Ito (ver apéndice 2), queda escrita como

$$dx = dt + \frac{3}{2} dW. \tag{5.26}$$

Ahora multiplicando la ecuación anterior por $2/3$, nos encontramos en la situación de la ecuación (4.2), que haciendo el cambio de variable (4.3), llegamos a (4.4), y tenemos que $y = \frac{2}{3}t + \lambda \int_0^t z^*$ con $y = \frac{2}{3}x - z^*$, y utilizando la Proposición 4.1.1, tenemos que

$$Ht \to 1 \text{ a.s. cuando } t \to \infty, \tag{5.27}$$

si $t + \frac{3}{2}W + C \neq 0$ para todo t con $C > 0$.

5.4.1.2. Una aplicación del teorema de Girsanov

Si integramos (5.26), tenemos que $H = \frac{1}{t + \frac{3}{2}W + C}$, con $C > 0$, y como una aplicación del teorema de Girsanov (ver 3.5 de [18]) tenemos que si $T_a := \inf\{t \geq 0 : \frac{2}{3}t + W = a\}$, entonces

$$\tilde{P}(T_{-\frac{2}{3}C} < \infty) \in (0, 1), \tag{5.28}$$

con $\tilde{P}$ una medida de probabilidad bajo la cual $\frac{2}{3}t + W$ es un movimiento browniano. Y entonces, H divergerá con una probabilidad en $(0, 1)$, y por tanto, si la solución es global, el comportamiento asintótico es el que dice (5.27), y si hay divergencia, y prolongamos la solución, es este el comportamiento asintótico.

5.4.1.3. En el sentido de Ito

Si en la ecuación (5.24) hacemos el cambio de variable $x = 1/H$ en el sentido de Ito, obtenemos

$$dx = \left(1 + \frac{9}{4x}\right) dt + \frac{3}{2} dW, \tag{5.29}$$

si hacemos ahora el cambio $z = \frac{2}{3}x$, obtenemos

$$dz = \frac{2}{3}dt + \frac{1}{z}dt + dW. \tag{5.30}$$

Ahora

$$dy = \frac{1}{y}dt + dW, \tag{5.31}$$

tiene como solución un proceso de Bessel y con $n = 3$ (ver [23] o [18]). Tenemos que $P(y > 0) = 1$ (ver [18]), y por tanto $y > 0$ a.s. Veamos que $z > 0$ a.s. para ello veamos que $z \geq y$ a.s. Supongamos que en (5.30) tenemos la condición inicial $z(0) > 0$, y en (5.31) tenemos la condición inicial $y(0) = z(0)$. Supongamos que la afirmación $z \geq y$ a.s. es falsa, entonces existe un conjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de medida no nula tal que para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$ existe un $t_\omega > 0$ tal que $z(t_\omega, \omega) < y(t_\omega, \omega)$. Si para todo $t \in (0, t_\omega)$ se tiene que $z(t, \omega) < (t, \omega)$, entonces

$$\begin{aligned} z(t_\omega, \omega) - y(t_\omega, \omega) &= \frac{2t_\omega}{3} + \int_0^{t_\omega} \left(\frac{1}{z(\tau, \omega)} - \frac{1}{y(\tau, \omega)} \right) d\tau \\ &> \frac{2t_\omega}{3} > 0, \end{aligned}$$

en contradicción con que $z(t_\omega, \omega) < y(t_\omega, \omega)$. Por otra parte, supongamos sin pérdida de generalidad, que existe t_ω^* tal que para todo $t \in (0, t_\omega^*)$ se tiene que $z(t, \omega) \geq y(t, \omega)$ y para todo $t \in (t_\omega^*, t_\omega)$ se tiene que $z(t, \omega) < y(t, \omega)$, en particular, por continuidad de z e y en t, se tiene que $z(t_\omega^*, \omega) = y(t_\omega^*, \omega)$. Entonces

$$\begin{aligned} z(t_\omega, \omega) - y(t_\omega, \omega) &= \frac{2(t_\omega - t_\omega^*)}{3} + \int_{t_\omega^*}^{t_\omega} \left(\frac{1}{z(\tau, \omega)} - \frac{1}{y(\tau, \omega)} \right) d\tau \\ &> \frac{2(t_\omega - t_\omega^*)}{3} > 0, \end{aligned}$$

en contradicción con que $z(t_\omega, \omega) < y(t_\omega, \omega)$. Y puesto que $y > 0$ a.s. tenemos que $z > 0$ a.s. Además, puesto que $P(\lim_{t\to\infty} y = \infty) = 1$ (ver [18]), y puesto que $z = \frac{2}{3H}$ y $z \geq y$ a.s. tenemos

$$H \to 0 \text{ a.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.32}$$

Sin embargo, podemos tener un comportamiento asintótico como en (5.27), para ello observamos con un análisis similar al anterior que

$$z_- \leq z \leq z_+, \tag{5.33}$$

con $z_-(t) = \frac{2}{3}t + W(t) + a$, y $z(0) = a > 0$, y $z_+(t)$ un proceso de Bessel de tipo $n = 3$ y dato inicial a, y deriva $2/3$, es decir, $z_+(t) = \xi_a(t) + \frac{2}{3}t$, y ξ_a un proceso de Bessel de tipo $n = 3$, y dato inicial $a = z(0) > 0$. Efectivamente,

$$z(t, \omega) - z_-(t, \omega) = \int_0^t \frac{1}{z(\tau, \omega)} d\tau \geq 0.$$

Por otra parte

$$z_+(t, \omega) - z(t, \omega) = \int_0^t \left(\frac{1}{\xi_a(\tau, \omega)} - \frac{1}{z(\tau, \omega)} \right) d\tau \geq 0,$$

ya que como veíamos anteriormente, $z \geq \xi_a$. Y ahora, ya que $\frac{W(t)}{t} \to 0$ a.s. cuando $t \to \infty$ (proposición 4.1.1) y $\frac{\xi_a}{t} \to 0$ a.s. puesto que ξ_a es la norma de un movimiento Browniano en $n = 3$ (ver [18]), y por tanto,

$$\frac{\xi_a}{t} = \frac{a}{t} + \sqrt{\left(\frac{W_1(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{W_2(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{W_3(t)}{t}\right)^2} \to 0 \text{ a.s.}$$

cuando $t \to \infty$. Y finalmente, dividiendo (5.33) por $\frac{2}{3}t$, tenemos (5.27).

5.5. Estabilización dinámica

5.5.1. El caso autónomo

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x^2), \tag{5.34}$$

que tiene tres puntos de equilibrio $\{-1, 0, 1\}$; en el que $x = 0$ es un punto inestable, y $x = -1$ y $x = 1$ son estables (solo hay que derivar $x(1 - x^2)$, evaluar en $x = 0, -1,$ y 1, y ver el signo de la derivada. Ver Teorema A.1.1). El atractor del sistema es $K = [-1, 1]$ (los puntos -1 y 1 son atractivos, mientras 0 es repelente).

5.5.2. El caso estocástico

Consideremos ahora la perturbación estocástica

$$dX_t = X_t(1 - X_t^2)dt + \sigma X_t dW. \tag{5.35}$$

Veremos que la ecuación (5.35) genera un RDS, que posee un atractor global formado por un único punto $\mathcal{A}_\omega = \{0\}$ para todo ω, si la intensidad del ruido es suficientemente grande. Es en este sentido que decimos que la dinámica se ha simplificado.

Escribamos la ecuación en el sentido de Stratonovich,

$$dX_t = \left(X_t(1 - X_t^2) - \frac{\sigma^2}{2} X_t \right) dt + \sigma X_t \circ dW_t. \tag{5.36}$$

Aplicando la transformación $\tilde{X}_t = X_t e^{-\sigma z^*(\theta_t(\omega))}$, siendo θ_t el flujo generado por el proceso de Wiener, y z^* el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, tenemos

$$\frac{d\tilde{X}_t}{dt}(t,\omega) = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma z^*(\theta_t(\omega))\right)\tilde{X}_t - e^{2z^*(\theta_t(\omega))}\tilde{X}_t^3, \tag{5.37}$$

cuya solución (que en este caso existe) genera un sistema dinámico aleatorio $\varphi(t,\omega,\tilde{X}_{t,0}) = \tilde{X}_t(t,0,\omega,\tilde{X}_{t,0})$, con $\tilde{X}_t(0) = \tilde{X}_{t,0}$.
La ecuación (5.37) es de tipo Bernoulli, y haciendo el cambio de variable $Y_t = \tilde{X}_t^{-2}$, se convierte en la ecuación lineal,

$$\frac{dY_t}{dt} = -2(1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma z^*)Y_t + 2e^{2\sigma z^*}, \tag{5.38}$$

cuya solución es

$$Y_t = Y_0 e^{-(2-\sigma^2)t - 2\sigma\int_0^t z^*(\theta_s(\omega))ds} + 2\int_0^t e^{-2(t-s)+2\sigma z^*(\theta_s(\omega)) - 2\sigma\int_s^t z^*(\theta_r(\omega))dr} ds, \tag{5.39}$$

que proporciona una expresión explícita para φ. Si $\sigma^2 > 2$,

$$Y_t \geq Y_0 e^{-(2-\sigma^2)t - 2\sigma\int_0^t z^*(\theta_s(\omega))ds}, \tag{5.40}$$

y haciendo la transformación $\omega \to \theta_{-t}(\omega)$

$$Y_t \geq Y_0 e^{-(2-\sigma^2)t - 2\sigma\int_{-t}^0 z^*(\theta_s(\omega))ds}, \tag{5.41}$$

que tiende a ∞ cuando t tiende a ∞ por las propiedades de z^* (ver la proposición 4.1.1). Por tanto

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\omega,t_0,\tilde{X}_{t,0}) = \varphi(t,\theta_{-t}(\omega),t_0,\tilde{X}_{t,0}) = 0.$$

5.6. Bifurcación de pitchfork

5.6.1. El caso autónomo

Consideremos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3. \tag{5.42}$$

Para $r \leq 0$, el único punto de equilibrio es el cero, que es estable, sin embargo, si $r > 0$, aparecen dos nuevos puntos, $\pm\sqrt{r}$, que son estables, y el cero que ahora es inestable. Y los atractores del sistema dependiendo de r son

$$\mathcal{A} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ [-\sqrt{r}, \sqrt{r}] & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

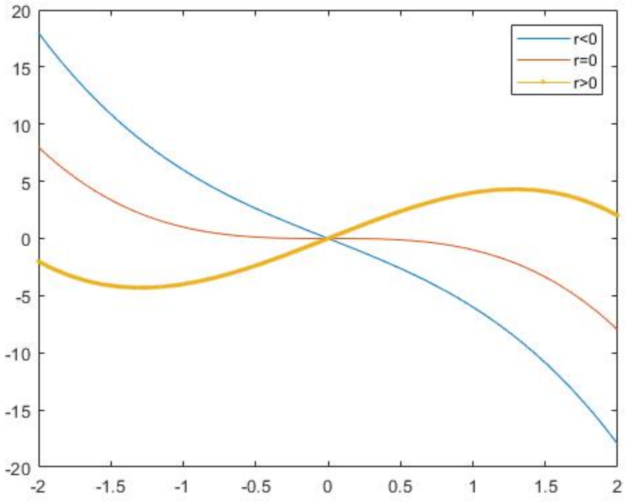


Figura 5.1: Representación de $rx - x^3$

5.6.2. El caso estocástico

Vamos a ver que si añadimos un término aditivo de ruido, el atractor colapsa a un punto para cualquier r, y la bifurcación del caso autónomo desaparece.

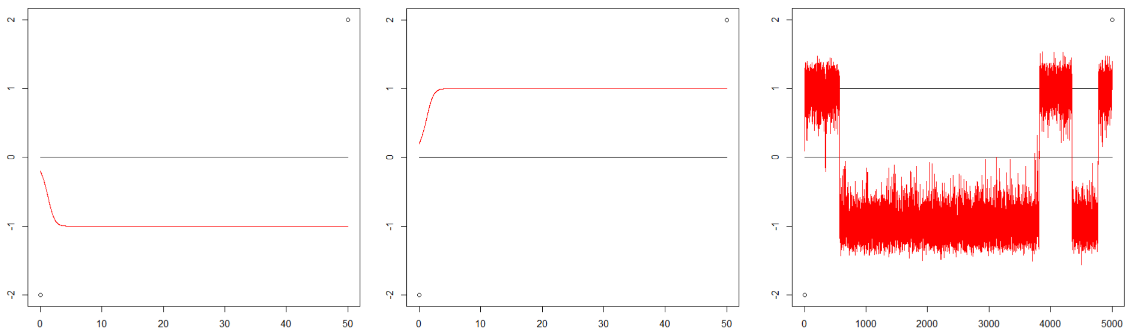


Figura 5.2: Sin término aditivo y con término adtivo

Consideremos la ecuación,

$$dX_t = (rX_t - X_t^3)dt + \epsilon dW, \epsilon > 0. \tag{5.43}$$

Teorema 5.6.1. *Si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, y μ es una medida invariante ergódica*[1]*, entonces μ es una delta de Dirac soportada en un punto x_0 a.s.*

[1]Una medida μ se dice ergódica si $\mu(A) \in \{0, 1\}$ cuando A es φ-invariante

Demostración. Sea $x_0(\omega) = \text{ínf}\{x : \mu_\omega([x,\infty)) \leq 1/2 \leq \mu_\omega((-\infty, x])\}$, y consideremos $C^-_\omega = (-\infty, x_0(\omega)]$. Entonces C^- es invariante. Efectivamente, si $x_1 \leq x_2 \implies \varphi(t,\omega,x_1) \leq \varphi(t,\omega,x_2)$, y φ preserva el orden. Esto es así, ya que si $\varphi(t,\omega,x_1) > \varphi(t,\omega,x_2)$ con t el menor t para el que esto ocurre, existiría algún $\theta(\omega) \in [0,t)$ tal que $\varphi(t,\omega,x_1) = \varphi(t,\omega,x_2)$, en contradicción con la propiedad de cociclos,

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\omega,x_1) &= \varphi(\tau + (t-\tau), \omega, x_1) \\
&= \varphi(\tau, \theta_{t-\tau}, \varphi(t-\tau, \omega, x_1)) \\
&\leq \varphi(\tau, \theta_{t-\tau}, \varphi(t-\tau, \omega, x_2)) \\
&= \varphi(t,\omega,x_2).
\end{aligned}$$

Por tanto $x_0(\theta_t(\omega)) = \varphi(t,\omega,x_0(\omega))$ y $C^-_{\theta_t(\omega)} = \varphi(t,\omega,C^-_\omega)$. Ahora, por ergodicidad $\mu_\omega(C^-_\omega) = 1$ a.s. Análogamente, $C^+_\omega = [x_0(\omega), \infty)$ es invariante, y $\mu_\omega(C^+_\omega) = 1$ a.s. Por tanto $\mu_\omega(x_0(\omega)) = 1$ a.s. y $\mu_\omega = \delta_{x_0(\omega)}$. □

Ahora, puesto que la solución estacionaria de Fokker-Planck es ergódica (en este caso $p_s(x) = \frac{N}{\epsilon^2} \exp\left\{\frac{2}{\epsilon^2}\left(\frac{rx^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right\}$, que está soportada en toda la recta real. Ver (C.4)), y puesto que es invariante, es una delta de Dirac, y el conjunto atractor está soportado en la delta de Dirac, y necesariamente es un punto.
En general, cuando un RDS admite una única medida invariante, el conjunto atractor se reduce a un punto. Más precisamente.

Teorema 5.6.2. *Sea un RDS generado por una SDE (unidimensional) que admite una única medida invariante, y sea $\mathcal{K}$ un compacto aleatorio estrictamente invariante, $\mathcal{F}^-$-medible (ver el Teorema 3.2.1). Entonces $\mathcal{K}$ está formado por un único punto a.s.*

Demostración. Sea, $x^-_\omega = \text{mín}\,\mathcal{K}_\omega$, y $x^+_\omega = \text{máx}\,\mathcal{K}_\omega$, que son dos variables aleatorias $\mathcal{F}^-$-medibles. Además, por la estricta invarianza de $\mathcal{F}^-$

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\omega,x^+_\omega)) &= x^+_{\theta_t(\omega)} \\
\varphi(t,\omega,x^-_\omega)) &= x^-_{\theta_t(\omega)},
\end{aligned}$$

por tanto $\mu^\pm_\omega = \delta_{x^\pm}$ son medidas invariantes, pero por la unicidad, $x^+_\omega = x^-_\omega$. □

En general, la ecuación

$$dX_t = f(X_t)dt + \epsilon dW, \epsilon > 0, \tag{5.44}$$

genera un RDS continuo, si $f \in C^1$, y tiene una medida de probabilidad invariante estacionaria, que es la solución estacionaria de Fokker-Planck ([10]. 3.7.).
Veamos, también, como en términos del exponente de Lyapunov, las trayectorias convergen a un punto.
Linealizando el RDS (generado por (5.44)) a lo largo de la trayectoria $\varphi(t, \omega, x)$ uno obtiene un RDS lineal asociado a la ecuación diferencial ordinaria lineal unidimensional $\dot{v} = f'(\varphi(t, \omega, x))v$. Para toda medida invariante μ de φ, este es un RDS lineal sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}, \mu)$.
Para este RDS unidimensional existe un exponente de Lyapunov λ (el exponente de Lyapunov de un sistema dinámico lineal unidimensional es una medida del alejamiento de dos trayectorias en el espacio de fases. Si $d(t)$ denota la separación de dos trayectorias, $d(t) \sim d(0)e^{\lambda t}$), dado por,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln |D_{\varphi(t,\omega,x)} \varphi(t, \omega, v)| && (5.45) \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f'(\varphi(s, \omega, x)) ds && (5.46) \\
&= \int_\Omega \int_\mathbb{R} f'(x) d\mu_\omega(x) d\mathbb{P}(\omega) \text{ (por el teorema ergódico [1]. Apéndice A.)} && (5.47) \\
&= \int_\mathbb{R} f'(u) p_s(u) du && (5.48) \\
&= -N \int_\mathbb{R} f(u) \left(\frac{f(u)}{\epsilon^2} \exp \left(\frac{F(u)}{\epsilon^2} \right) \right) && (5.49) \\
&\text{(integrando por partes. Con } F \text{ la primitiva de } f\text{. Ver la ecuación (C.4))} && (5.50) \\
&= -\frac{N}{\epsilon^2} \int_\mathbb{R} f(u)^2 \exp \left(\frac{F(u)}{\epsilon^2} \right) du < 0. && (5.51)
\end{aligned}
$$

Consecuentemente, dos trayectorias cualesquiera convergen una a la otra (exponencialmente) para cualquier r.

5.7. Referencias

En la elaboración de este capítulo he seguido [3] para 5.1, 5.2 y 5.5. La sección 5.3 está elaborada aplicando las ideas de 5.5. La sección 5.4 está recogida, con mayor nivel de detalle, en [11]. He utilizado [10] para la sección 5.6. También he añadido el teorema 1.8.4 de [1] como un resultado general de RDS en este contexto, en la sección 5.6.

A modo de epílogo

Hemos llegado al final del trabajo y nos gustaría resaltar algunas ideas del trabajo. Hemos intentado mostrar como se construye la teoría de los sitemas dinámicos estocásticos desde los sistemas autónomos, pasando por los sistemas no autónomos, y llegando finalmente a los sitemas aleatorios; intentando que los conceptos geométricos que nos sirven para ir construyendo la teoría se puedan reconocer en los distintos capítulos como sucesivas generalizaciones que permitan atrapar las nuevas situaciones a describir.
La teoría de los sistemas dinámicos aleatorios no deja de ser una teoría global en la que se necesitan trayectorias que existan en todo tiempo (ver las secciones 5.1, 5.2, 5.3, 5.5), por lo que cuando hemos tocado el mundo estocático se haya tenido que hacer un análisis estocástico detallado de la ecuación, como en la sección 5.4.
También, como decíamos en el encabezamiento del capítulo 3, citando [12], la teoría de los sistemas dinámicos aleatorios se desarrolla introduciendo las herramietas de la teoría de la probabilidad en la teoría de los sistemas dinámicos deterministas por lo que no es extraño que tengamos resultados como los del teorema 3.3.1, en el que se relacionan los atractores de un sistema dinámico aleatorio con las medidas invariantes de este sistema. Un ejemplo de esta relación es la sección 5.6.
Otro ingrediente de la teoría es el cálculo de estas medidas que nos lleva a la ecuación estacionaria de Fokker-Planck y su relación con los procesos de Markov y la teoría de semigrupos como apuntamos en el apéndice C.3.
Nos gustaría, para finalizar, resaltar la riqueza de conceptos geométricos y analíticos, que de alguna manera enumeramos en este epílogo, que resultan de introducir las herramientas de la teoría de la probabilidad en la teoría de los sistemas dinámicos deterministas para poder tratar la incertidumbre o la complejidad.

Apéndice A

Estabilidad de EDOs

A.1. Un teorema

Consideremos el sistema autónomo $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Un punto de equilibrio de la anterior ecuación, es un punto que verifica $f(x^*) = 0$. Entonces

Teorema A.1.1. *Si los autovalores del jacobiano de f evaluados en x^* tienen parte real negativa, entonces x^* es localmente estable. Y si alguno de sus autovalores tiene parte real positiva, x^* es localmente inestable.*

A.2. Referencias

En la elaboración de este apéndice he seguido [3].

Apéndice B

Introducción a las ecuaciones estocásticas

B.1. Proceso de Wiener

Un proceso de Wiener, $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, es un proceso estocástico, es decir, una colección de aplicaciones medibles para cada t, verificando,

1. $W_0(\omega) = 0 \ \forall \omega \in \Omega$.
2. Sea $t \geq s$. Entonces $W_t - W_s$ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza $t - s$.
3. Si $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$, entonces los $W_{t_i} - W_{s_i}$ son independientes, para $i \in \{1, \cdots, n\}$.
4. $t \mapsto W_t$ es continua a.s.

B.2. Algunas notas sobre la integral estocástica

Sea $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un movimiento Browniano estándar o un proceso de Wiener unidimensional definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Consideremos la ecuación determinista

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,t), \ \ t, x \in \mathbb{R}.$$

Introduciendo el ruido, consideremos la ecuación estocástica,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,t) + \sigma(x,t)\frac{dW_t}{dt},$$

con $\frac{dW_t}{dt}$ puramente notacional. Escribamos la ecuación anterior de una forma algo más adecuada,

$$dx = f(x,t)dt + \sigma(x,t)dW_t,$$

que adquiere su sentido escrita de forma integral,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t \sigma(x(s),s)dW_s,$$

en el que hay que dotar de sentido a $\int_0^t \sigma(x(s),s)dW_s$.
Nótese que para todo $\omega \in \Omega$, la aplicación

$$t \in \mathbb{R} \mapsto W_t(\omega),$$

es continua, pero no es de variación acotada en cualquier intervalo $[t_1, t_2]$. Y entonces, aunque toda trayectoria W_t es continua, no puede ser utilizada como una función integrante de una integral de Riemann-Stieljes respecto de la medida asociada al proceso de Wiener.
Por simplicidad, consideremos $\int_0^T W_s dW_s$.
Sea $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = T\}$ una partición de $[0,T]$ tal que $\delta_n := \max_{0\leq k\leq n-1}\{t_{k+1}^n - t_k^n\} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Sea ahora $a \in [0,1]$, y sea $\tau_k^n := at_k^n + (1-a)t_{k-1}^n$, y consideremos la correspondiente suma de Riemann-Stieljes

$$S_n = \sum_{k=1}^n W_{\tau_k^n}(W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n}).$$

Ahora por la descomposición

$$\begin{aligned} S_n = \frac{W_T^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n})^2 + \sum_{k=1}^n (W_{\tau_k^n} - W_{t_{k-1}^n})^2 \\ + \sum_{k=1}^n (W_{t_k^n} - W_{\tau_{k-1}^n})(W_{\tau_k^n} - W_{t_{k-1}^n}). \end{aligned}$$

Entonces, por las propiedades de un proceso de Wiener, tenemos que (ver [14] capítulo 4)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{W_T^2}{2} - \frac{(1-2a)}{2}T, \text{ en } \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}),$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| S_n - \left(\frac{W_T^2}{2} - \frac{(1-2a)}{2}T\right)\right|^2 d\mathbb{P}(\omega) = 0.$$

Por tanto $\int_0^T W_s dW_s$ toma diferentes valores en función de a. Siendo en general así para integrales del tipo $\int_0^T f(s, W_s) dW_s$. Cuando $a = 1/2$, elegimos el punto medio de los intervalos de la partición, y la integral resultante decimos que es en el sentido de Stratonovich, y si $a = 0$, el extremo izquierdo de los intervalos de la partición, decimos en el sentido de Ito. Podemos transformar una integral (en tiempo finito) de un tipo (Ito, $\int f dW$) en la otra (Stratonovich, $\int f \circ dW$) a través de

$$\int_{t_0}^{T} f(t, X_t) \circ dW = \int_{t_0}^{T} f(t, X_t) dW + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial X} f(t, X_t) dW,$$

si $f \in C^1$

B.3. Referencias

En la elaboración de este apéndice he seguido [3].

Apéndice C

De medidas invariantes

C.1. De medidas aleatorias invariantes

En este apéndice queremos presentar la construcción de una medida aleatoria invariante para un RDS (θ, φ), generado por una SDE, sobre el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_s^t\}_{s\leq t}, \mathbb{P})$ junto a la familia $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, a partir de algunos resultados de convergencia de medidas y de una medida invariante, en un sentido más débil que el de medida invariante de un RDS.
Sea ρ una medida invariante para φ, en el siguiente sentido

$$\int_{\mathbb{X}} d\rho p_t(x, B) = \rho(B), \text{ con } B \text{ medible.} \tag{C.1}$$

con $p_t(x, B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \varphi(t, \omega, x) \in B\}$. La ecuación (C.1) la podemos escribir como $\rho p_t = \rho$.
Ahora para cada $t \in \mathbb{R}^+$ defino las medidas aleatorias $\mu^t = \{\mu_\omega^t\}_{\omega\in\Omega}$,

$$\mu_\omega^t = \varphi(t, \theta_{-t}(\omega), \cdot)\rho.$$

Proposición C.1.1. *Para cada* $f \in C_b(\mathbb{X})$, $\{\mu^t(f)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es una martingala adaptada a la filtración* $\{\mathcal{F}_{-t}^0\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Demostración. Ver [12], proposición 85. □

Ahora, de la observación

$$\mathbb{E}(|\mu^t(f)|^p) \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}^p,$$

y del siguiente teorema

Teorema C.1.1. *Sea un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq\infty}, \mathbb{P})$, *y sea* $\{X_t\}_t$ *una submartingala continua por la derecha tal que* $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$. *Entonces existe* $L^1 \ni X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ *a.e.* ω.

Tenemos que

Teorema C.1.2. *$\mu^t(f)$ converge a.s. $\forall f \in C_b(\mathbb{X})$.*

Y finalmente

Teorema C.1.3. *Si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, entonces existe una medida aleatoria invariante μ tal que*

$$\mu_\omega^t \to \mu_\omega \text{ débilmente a.e. } \omega \in \Omega.$$

Demostración. Probemos solo la invarianza de μ. Para el resto de la demostración ver [12], pág. 64.

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\omega,\cdot)\mu_\omega &= \varphi(t,\omega, \lim_{s\to\infty} \varphi(s,\theta_{-s}(\omega),\cdot))\rho \\
&= \lim_{s\to\infty} \varphi(t+s,\theta_s(\omega),\cdot)\rho \text{ (por continuidad de } \varphi \text{ y su propiedad de cociclos)} \\
&= \lim_{u\to\infty} \varphi(u,\theta_{-u}\theta_t(\omega),\cdot)\rho \\
&= \mu_{\theta_t\omega}.
\end{aligned}$$

□

C.2. Ecuación de Fokker-Planck

Dada la SDE en el sentido de Ito

$$dx = f(x)dt + \sigma g(x)dW, \tag{C.2}$$

la ecuación de Fokker Planck asociada es

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(fp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2 p). \tag{C.3}$$

Que tiene por solución estacionaria (cuando las fronteras son naturales. Ver 6.1 de [16])

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2}\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\int^x \frac{f}{g^2}\right\}, \text{ con } N \text{ un factor de normalización.} \tag{C.4}$$

Y lo que es más relevante, esta solución estacionaria, la podemos identificar con la función de densidad de la medida aleatoria μ_ω. La idea de por qué la densidad de probabilidad de la medida invariante es la solución estacionaria de Fokker-Planck viene de la siguiente observación

$$0 = \int \mathcal{L}h d\mu = \int \mathcal{L}hp dx = \int h\mathcal{L}^* p dx, \ \forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \tag{C.5}$$

donde $\mathcal{L}^*p = -\frac{\partial}{\partial x}(fp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2p)$, y $0 = \int \mathcal{L}hd\mu$, $\forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, es la condición de invarianza de μ que aparecía en la ecuación (C.1) (ver el Teorema 4.4 de [13]). Efectivamente

$$\int \mathcal{L}hd\mu = \lim_{t\to 0^+} \frac{\int (p_t h - h)d\mu}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\int hd(\mu p_t) - \int hd\mu}{t},$$

pero precisamente, $\mu p_t = \mu$, era la condición de invarianza para ρ en la ecuación (C.1). Ahora (C.5) sigue de que $\mathcal{L}^*$ es el operador adjunto de $\mathcal{L}$, y de integrar por partes.

C.3. Referencias

En la elaboración de este apéndice he seguido [12] para la sección 1, y [13] , y [16] para la sección 2.

Bibliografía

[1] L. Arnold. *Random Dynamical System.* Springer. 1998.

[2] F. Campillo, M. Joannides, I. Larramendi-Valverde. *Estimation of the parameters of a stochastic logistic growth model.* arXiv:1307.2217v1

[3] T. Caraballo, X. Han. *Applied Nonautonomous and Random Dynamical System. Applied Dynamical System.* bcam, Springer. 2016.

[4] T. Caraballo, P. E. Kloeden, B. Schmalfuß. *Exponentially Stable Stationary Solutions for Stochastic Evolution Equations and Their Perturbation.* Appl. Math. Optim. 50.183-207 (2004).

[5] F. Chamizo. *Seminario 2001.* Notas

[6] H. Crauel. *Global Random Attractors are Uniquely Determined by Attracting Deterministic Compact Sets.* Annali di Matematica pura ed applicata. (IV), Vol. CLXXVI (1999), pp. 57-72.

[7] H. Crauel. *Random point attractors versus random set attractors.* J. London Math. Soc. (2) 63 (2001) 413-427.

[8] H. Crauel. A. Debussche. F. Flandoli. *Random attractors.* Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 9, No. 2, 307-341. 1997.

[9] H. Crauel. F. Flandoli. *Attractors for random dynamical systems.* Probab. Theory Relat. Fields 100, 365-393 (1994).

[10] H. Crauel. F. Flandoli. *Additive Noise Destroys a Pitchfork Bifurcation.* Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 10, No. 2, 259-274. 1998.

[11] C. Escudero, C. Manada. *Itô versus Stratonovich in a stochastic cosmological model.* arXiv: 2104.11201

[12] F. Flandoli. E. Tonello. *An Introduction to Random Dynamical Systems for Climate*. Notas.

[13] A. Eberle. *Markov Processes*. Notas.

[14] L. C. Evans. *An introduction to stochastic differential equations*. AMS. 2013.

[15] E. Lorenz. *Irregularity: a fundamental property of the atmosphere*. Tellus (1984).36A,98-110.

[16] W. Horsthemke, R. Lefever. *Noise Induced Transitions*. Springer. 2006.

[17] M. John, C. Sivakumar, B. Joseph. *Classical stochastic approach to cosmology revisited*. PRAMANA - journal of physics. Indian Academy of Sciences. Vol. 60, No. 1 January 2003 pp. 1 - 10.

[18] I. Karatzas, S. E. Srheve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer. 1998.

[19] W. O. Kermack, A. G. Mc. Kendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. Royal Soc. London, 115. 700-721, 1927.

[20] W. O. Kermack, A. G. Mc. Kendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. Royal Soc. London, 138. 55-83, 1932.

[21] W. O. Kermack, A. G. Mc. Kendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. Royal Soc. London, 141. 94-112, 1933.

[22] P. E. Kloeden, M. Rasmussen. *Nonautonomous Dynamical Systems*. American Mathematical Society. Volume 176. 2011.

[23] H-H Kuo. *Introduction to Stochastic Integration*. Springer. 2006.

[24] P. E. Kloeden, C. Pötzsche, M. Rasmussen. *Discrete-time nonautonomous dynamical systems*. Notes.

[25] B. Schmalfuß. *The random attractor of the stochastic Lorenz system*. Z. Angew. Math. Phys. 48 (1997) 951-975.

Índice alfabético